56 Pages

195 S.P

مسائل

تحريك

بضعة مسائل هامة مختارة
من الكتاب ومن الدورات

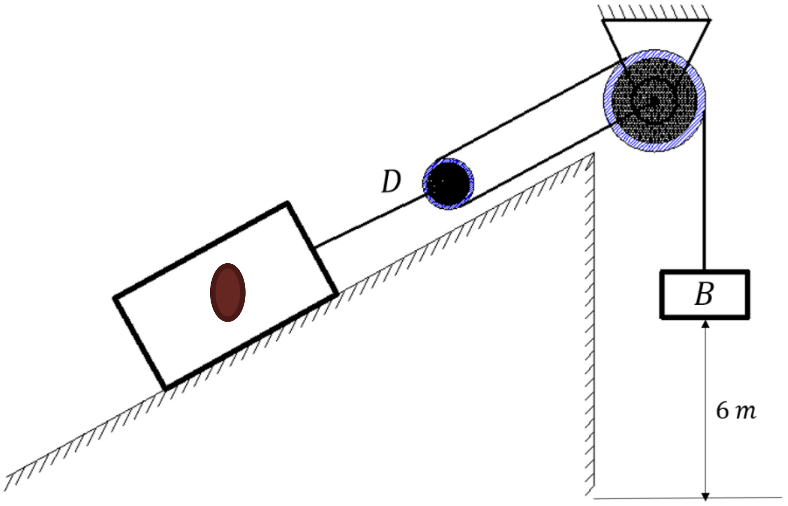
هندسة الميكانيك العام

السنة الثانية

#VivaRBCs
فريق الكريات الحمراء التطوعي

RBCs HAMAK

المسألة الاولى: (دورة امتحانية)



يبدأ الجسيم B وكتلته $m = 450\ kg$ حركته من السكون نحو اسفل المستوي الاملس بتسارع ثابت حيث يميل المستوي بزاوية $\alpha = 30°$ وينزلق الجسيم عليه ليرفع جسيم آخر C كتلته $m = 100\ kg$ عبر البكرة D مهملة الكتلة والمستوي أملس.

المطلوب:

التسارع الخطي والقوة المؤثرة لكل من الجسيمين _ شرط الحركة.

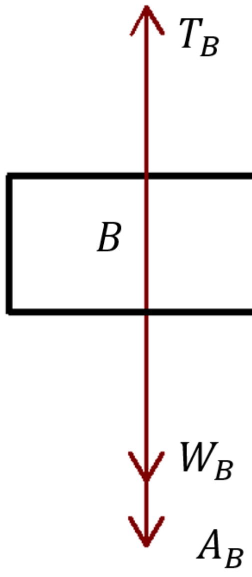
الحل:

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك على الجسيم B الذي يتحرك حركة انسحابية في اللحظة المدروسة وبعد تحريره :

$$\Sigma\vec{F}_B = m_B.\vec{A}_B \Rightarrow \vec{W}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 = m_B.\vec{A}_B$$

بإسقاط العلاقة على منحى موازي لمنحى الحركة وبجهتها (نحو الأسفل):

$$-T_1 + W_1.sin\alpha = m_B.A_B \dots 1$$



وباسقاط العلاقة الشعاعية على منحى عمودي على منحى الحركة وبجهته(نحو الاعلى):

$$N_1 - W_1.cos\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = W_1.cos\alpha \dots 2$$

نلاحظ ان المعادلات غير كافية لإيجاد التسارع فنتعمق جيدا في المعطيات......... يوجد لدينا بكرة ثابتة مهملة الكتلة (متوازنة):

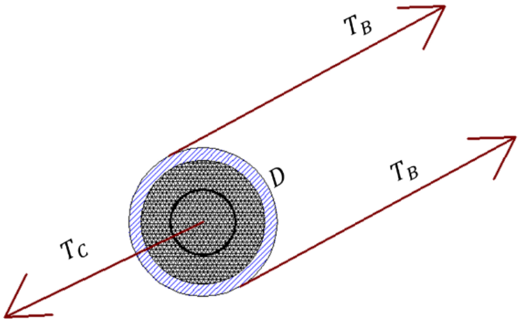
نطبق عليها قانون التوازن:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{T}_1 + 2\vec{T}_2 = 0$$

بالإسقاط على منحى موازي لمنحى الحركة وبجهتها

$$T_1 - 2T_2 = 0 \Rightarrow T_1 = 2T_2 \dots 3$$

حتى الآن مازالت المعادلات غير كافية لأن عدد المجاهيل 4 وعدد المعادلات 3 ......بالعودة لقوانين الحركات الغير مستقلة:



$$\Delta y_C + 2\Delta y_B = 0$$

بالاشتقاق:
$$v_C + 2v_B = 0$$

بالاشتقاق:
$$A_C + 2A_B = 0$$

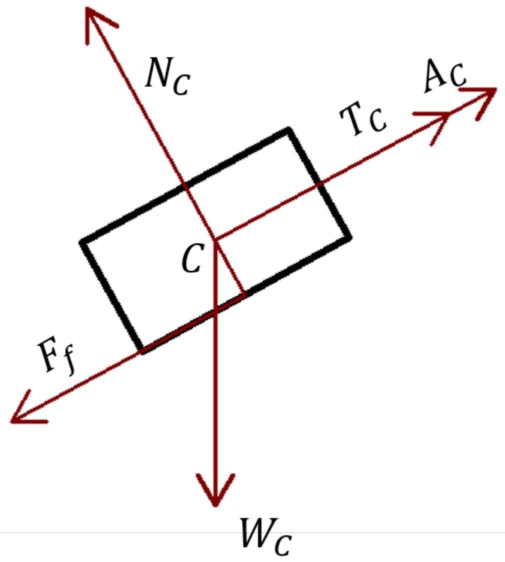
$$\Longrightarrow A_C = -2A_B \ldots 4$$

ملاحظة: نعوض التسارع في القانون الأخير كما هو من غير اشارة سالبة أي: $A_C = 2A_B$

والآن نطبق العلاقة الاساسية في التحريك على الجسيم C في اللحظة المدروسة:

$$\Sigma\vec{F}_C = m_C.\vec{A}_C \Longrightarrow \vec{W}_2 + \vec{T}_2 = m_C.\vec{A}_C$$

نسقط العلاقة على منحى موازي لمنحى الحركة متجه نحو الأعلى:



$$-W_2 + T_2 = m_C.A_C \ldots 5$$

والآن بنسب العلاقتين 1 و 5

$$\frac{m_B.A_B}{m_C.A_C} = \frac{W_1.sin\alpha - T_1}{-W_2 + T_2}$$

والآن نعوض العلاقات الأخرى:

$$T_C = 2T_B \,, 2A_B = A_C \ , \ W_1 = m_B.g \ , \ W_2 = m_C.g$$

فتصبح العلاقة:
$$\frac{m_B.A_B}{m_C.2A_B} = \frac{m_B.g.sin\alpha - 2T_2}{-m_C.g + T_2}$$

$$\Longrightarrow (-m_C.g + T_2).m_B = (m_B.g.sin\alpha - 2T_2)2m_C$$

$$\Longrightarrow -m_A.g.m_B + m_B.T_2 = 2m_C.m_B.g.sin\alpha - 4m_C.T_2$$

$$\Longrightarrow T_2(4m_C + m_B) = 2m_C.m_B.g.sin\alpha + m_C.m_B.g$$

$$\Longrightarrow T_2 = \frac{g.m_C.m_B(2.sin\alpha + 1)}{4m_C + m_B}$$

$$\Longrightarrow T_2 = \frac{9.81(450)(100)(2\sin(30) + 1)}{4(100) + 450} = 1038.7\ N$$

$$T_1 = 2T_2 = 2(1038.7) = 2077.4\ N$$

ومن العلاقة 5:

$$A_C = \frac{T_2 - W_2}{m_C} = \frac{T_2 - m_C.g}{m_C} = 0.577\, m.s^{-2}$$

ومن العلاقة 4: $A_C = 2A_B = 2 * 0.577$

$$A_C = 1.154\, m.s^{-2}$$

شرط الحركة(الطلب الثاني):

$$A_C > 0 \Longrightarrow -\frac{W_2 + T_2}{m_C} > 0$$

$$\Longrightarrow \; T_2 > W_2 \Longrightarrow T_2 > m_C.g$$

$$\Longrightarrow 1038.7 > 100 * 9.81$$

شرط الحركة الثاني: $A_B > 0 \Longrightarrow \frac{-T_1 + W.sin\alpha}{m_B} > 0$

$$\Longrightarrow \; -T_1 + W_1.sin\alpha > 0 \Longrightarrow W_1.sin\alpha > T_1$$

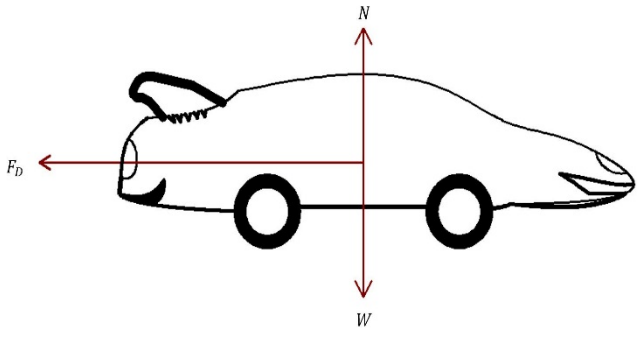
$$\Longrightarrow 2077 < m_B.g.sin\alpha$$

$$\Longrightarrow 2077 < 450 * 9.81 * sin30$$

$$2077 < 2207$$

اذا شروط الحركة محققة.

المسألة الثانية:



تتحرك سيارة كتلتها m على طريق أفقي بسرعة v_0
وتتعرض بعد إبطاء محركها إلى قوة مقاومة $F_D = k\ v$
حيث k هي معامل ثابت , v هي سرعة السيارة.

المطلوب:

إيجاد المسافة x التي تقطعها السيارة عندما تصبح سرعتها $0{,}5v_0$

إيجاد الزمن المار (t) حتى تصبح سرعة السيارة $0{,}5v_0$

حساب القيمة العددية للقيمة x و الزمن t وتسارع السيارة A عندما تصبح سرعتها $0{,}5v_0$ و ذلك من أجل :$(k = 20), (v_0 = 36km\backslash h), (m = 1000\ kg)$

استنتج وحدة المعامل k

الحل:

:نطبق العلاقة الأساسية في التحريك و نسقطها على منحى الحركة باتجاه الحركة :

الشكل 1

$$m\,\vec{A} = \vec{F_D} + \vec{W} + \vec{N} \;\Rightarrow m\,A = -F_D$$

$$m\,A = -k\,.v \qquad (*)$$

$$m\frac{dv}{dt} = -k\frac{dx}{dt}$$ نضرب الطرفين ب dt

$$m\,dv = -k\,dx \qquad \Rightarrow \qquad dx = -\frac{m}{k}dv$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = -\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v} dv \quad \Rightarrow (x - x_0) = -\frac{m}{k}(v - v_0)$$

بالتعويض في الشروط الابتدائية الموجودة في نص المسألة :

$$x = -\frac{m}{k}(0.5v_0 - v_0) \Rightarrow x = \frac{0{,}5\,m\,v_0}{k} \qquad (**)$$

من $(*)$ نجد $-kv = m\frac{dv}{dt}$

$$dt = \frac{m}{k} * \frac{dv}{v}$$ بمكاملة الطرفين نجد

$$\int_{t_0}^{t} dt = -\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} \quad \Rightarrow (t - t_0) = -\frac{m}{k}[\ln v]_{v_0}^{v}$$

$$t = \frac{m}{k}\ln(v_0) - \ln(0{,}5v_0) \Rightarrow t = \frac{m}{k}\ln(2) \qquad (***)$$

من $(**)$ نجد x :

$$x = \frac{0{,}5 * 1000 * \frac{1000}{3600}\,36}{20} = 250m$$

من $(***)$ نجد t :

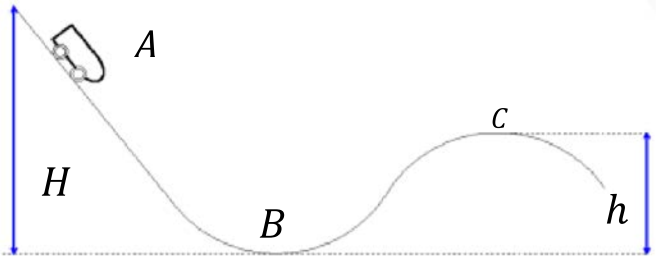
$$t = \frac{1000}{20} \ln 2 = 34.66 \mathrm{m}.s^{-1}$$

من $(*)$ نجد A :

$$\mathrm{A} = \frac{-k\ v}{m} = \frac{-20 * 5}{1000} = -0{,}1\ m \backslash s^2$$

$$F_D = k\ v \Rightarrow k = \frac{F_D}{v} \Rightarrow k \left[\frac{N\ s}{m}\right]$$

المسألة الثالثة:/تحريك الجسيم المادي(مبدأ العمل والطاقة الحركية):



يبدأ جسيم على شكل عربة صغيرة وزنها(ثقلها) P بالانزلاق من السكون في الموضع **A** خلال المسار **A,B,C** والمكون من ارتفاعات وانخفاضات متتالية والواقع في مستوي **شاقولي** (في مستوي شاقولي يصبح لقوة الثقالة عمل اما في الأفقي عملها معدوم لان الارتفاع الشاقولي **H** يساوي صفر)

المطلوب:

1- أوجد قوة رد فعل المسار على العربة عند وصولها الموضع B الذي عنده تكون $\rho_B = 6\ m$, HA_B=12m ,
$HB_C = 4.5\ m$

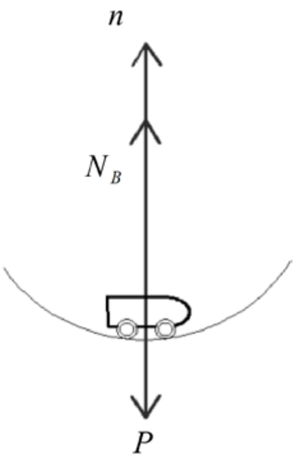
2- أصغر قيمة لنصف قطر تقوس المسار عند C بحيث لاتفقد العربة تماسها مع المسار.

الحل:

لإيجاد رد الفعل نطبق العلاقة الأساسية في التحريك على الجسيم في الموضع **B** $\Sigma\vec{F} =$

$$m.\vec{A} \Rightarrow \vec{W} + \vec{N}_B = m.\vec{A_B}$$

نسقط على الناظم وجهته نحو داخل التقوس(نحو الأعلى): $\vec{n}$:



$$N_B.P = m.A_B^n \Rightarrow N_B = m.\frac{v_B^2}{\rho_B} + P$$

$$N_B = m.\frac{v_B^2}{\rho_B} + m.g \dots 1$$

نلاحظ ان لدينا v_B^2 مجهول لحسابه نطبق مبدأ العمل والطاقة الحركية بين موضعين

A (حيث $v_A = 0$) و B(حيث $v_B = ?$):

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = \Sigma W_F = W_P + W_{NB}$$

حيث: (عمودي على الانتقال) $\frac{1}{2}m.v_A^2 = 0 \,, W_{NB} = 0$

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 = W_P = m.g.H \quad \left(H \text{ انتقال شاقولي}\right)$$

$$v_B^2 = 2g.H = 24g$$

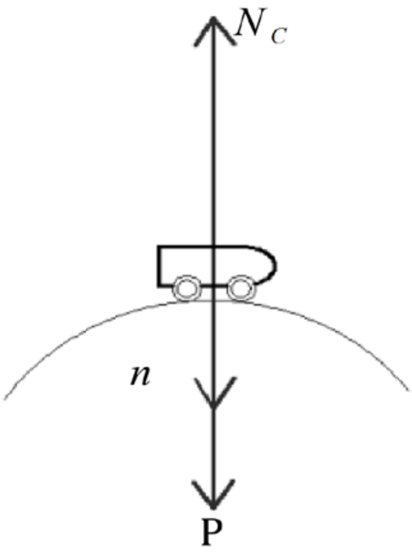
نعوض في العلاقة 1 فنجد ان:

$$N_B = m.\frac{24g}{\rho_B} + m.g$$

ولكن $\rho_B = 6\,m \;,\; m = \frac{P}{g}$:

$$N_B = \frac{P}{g}.\frac{24g}{6} + \frac{P}{g}.g$$

$$N_B = P(4+1) = 5P \quad N$$



كي لاتفقد العربة تماسها مع المسار: $N_c > 0$:

ولإيجاد علاقة N_C نطبق العلاقة الأساسية في التحريك في الموضع C فيكون:

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{A}$$

$$\vec{P} + \overrightarrow{N_C} = m.A_C^n$$

نسقط على $\vec{n}$ (المعين على الرسم):

$$P - N_C = m.A_C^n \Rightarrow N_C = P - m.A_C^n$$

نعوض في متراجحة الشرط:

$$N_C > 0 \Rightarrow P - m.A_C^n > 0 \Rightarrow P > m.A_C^n$$

$$\Rightarrow m.g > m.\frac{v_C^2}{\rho_C} \Rightarrow \rho_C > \frac{v_C^2}{g}$$

لإيجاد v_C^2 طبق مبدأ العمل والطاقة خلال الانتقال بين B (حيث $v = v_B$) و C(حيث $v_C = ?$)

$$\frac{1}{2}m.v_C^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = \Sigma W_F = W_P + W_{NC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m.v_C^2 = \frac{1}{2}m.v_B^2 + (-m.g.h)$$

الإشارة سالبة لان الانتقال نحو الأعلى

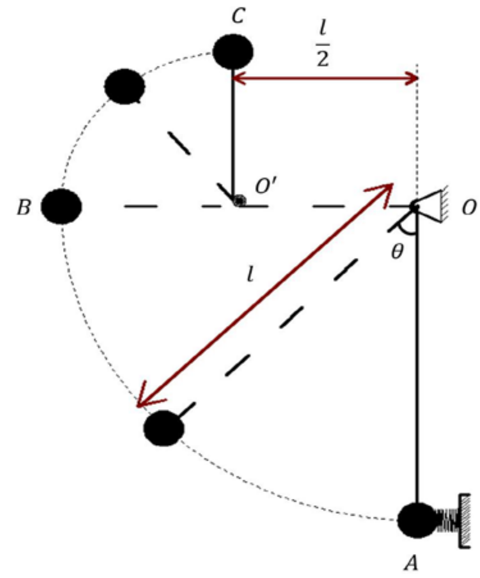
$$v_C^2 = v_B^2 - g.h = 24g - 4.5g = 19.5g$$

نعوض في المتراجحة

$$\rho_C > \frac{19.5g}{g} \Rightarrow \rho_C > 19.5\ m$$

المسألة الرابعة:

1- اكتب العلاقة الاساسية في لتحريك الجسيم خلال حركته النسبية واذكر حدودها وقارنها بلعلاقة الأساسية لتحريك الجسيم المادي واذكر نصها



2- تعلق كرة صغيرة كتلتها (m) بنهاية حبل غير مرن طوله $(\mathbf{L})$ طرفه الآخر مثبت في المسند O بحيث تمس نابض عامل صلابته K مضغوط بمقدار ΔL في الوضع A لها كما في الشكل.ولدى المرور بلوضع الافقي يصطدم الخيط في الوتد مثبت في 0_1 وترسم الكرة بعده مسارا دائريا جديدا نصف قطره $(L/2)$.

المطلوب:

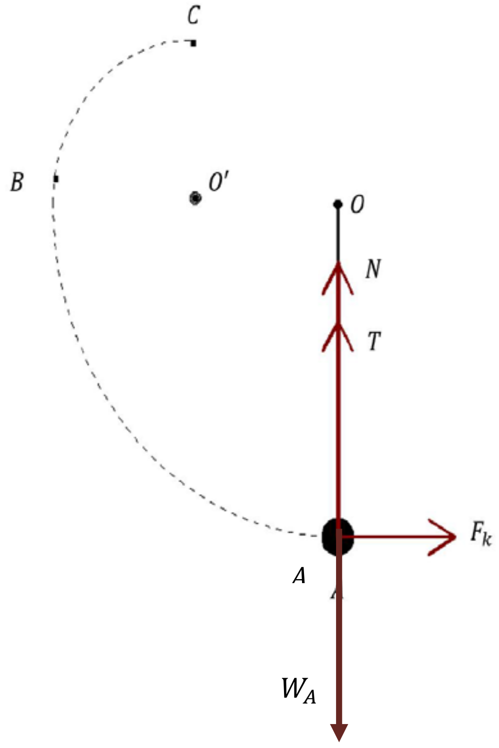
1- علاقة السرعة الخطية للكرة V_θ وقوة شد الخيط T_θ بدلالة زاوية الوضع العام θ .

2- علاقة السرعة الخطية للكرة V_C وقوة شد الخيط T_C عند الوضع C.

3- عامل صلابة النابض اللازم K_1 بحيث تصبح سرعة الكرة معدومة في الوضع B.

4- عامل صلابة النابض اللازم K_2 بحيث تستطيع الكرة عبور الموقع C.

الحل:



نطبق مبدأ الطاقة الحركية بين وضعين :

$$\frac{1}{2}M*V_\theta^2-\frac{1}{2}M*V_A^2=W_{\vec{W}}+W_{\vec{T}}+W_{\vec{F}_K}+W_{\vec{N}}$$

$$W_{\vec{w}}=-m*g*h=-m*g*l(1-cos(\theta))$$

$$W_{\vec{f}_k}=\frac{1}{2}K(\Delta l_{in}-\Delta l_{fin})$$

$$\Delta l_{in}=\Delta l$$

$$\Delta l_{fin}=0$$

$$W_{\vec{f}_k} = \frac{1}{2} K * \Delta l^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M * V_\theta^2 = -m * g * l\big(l - cos(\theta)\big) + \frac{1}{2} k * \Delta l^2$$

$$\Rightarrow v_\theta^2 = \frac{2}{M}\left[-m * g * l\big(1 - cos(\theta)\big) + \frac{1}{2} k * \Delta l^2\right]$$

لإيجاد قوة الشد في العلاقة الأساسية في التحريك وبإسقاطها على الناظم $\vec{n}$ وباختصار

$$m * \vec{A} = \Sigma \vec{F}_k = \vec{W} + \vec{T}$$

$$\Longrightarrow m * A^n = T - W * cos(\theta)$$

$$\Longrightarrow m * \frac{2}{ml}\left[-m * g * l\big(1 - cos(\theta)\big) + \frac{1}{2} k\Delta l^2\right] = T - W * cos(\theta)$$

$$T = W * cos(\theta) - 2m * g * \big(1 - cos(\theta)\big) + k * \Delta l$$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين CوB :

$$\frac{1}{2} M * V_C^2 - \frac{1}{2} M * V_B^2 = W_{\vec{w}}$$

$$W_w = -m * g * h = -m * g * \frac{l}{2}$$

$$V_B = -2g * l + k * \frac{\Delta l^2}{m}$$

$$\frac{1}{2} m * v_c^2 - \frac{1}{2} m\left[-2g * l + \frac{k * \Delta l^2}{m}\right] = -m * g * \frac{l}{2}$$

$$v_c^2 = -2 * g * l + \frac{k * \Delta l^2}{m} - g * l = \frac{-3g * l + k * \Delta l^2}{m}$$

لإيجاد قوة الشد $\vec{T}_c$ نطبق العلاقة الاساسية في التحريك:

$$m * A^n = T_C + W \Rightarrow m * \frac{v^2}{\frac{l}{2}} = m * g + T_c$$

$$T_c = \frac{-3m * g * l + k * \Delta l^2}{\frac{l}{2}} - mg$$

$$v_B = 0 \Rightarrow -2g * l + k * \frac{\Delta l^2}{m} = 0$$

$$\Rightarrow k * \frac{\Delta l^2}{m} = 2g * l$$

$$\Rightarrow k * \Delta l^2 = 2mgl \Rightarrow k = \frac{2mgl}{\Delta l^2}$$

حتى تعبر الكرة الموقع C يجب أن يكون $N_C > 0$ و $T_c > 0$

$$-3g * l + k * \frac{\Delta l^2}{m} > 0 \Rightarrow k * \frac{\Delta l^2}{m} > 3g * l$$

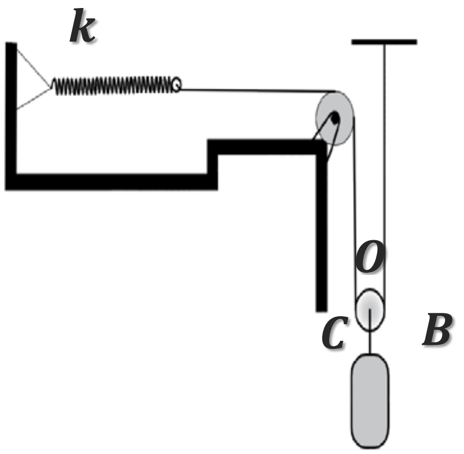
$$\Rightarrow k * \Delta l^2 > 3m * g * l \Rightarrow k > 3m * g * \frac{l}{\Delta l}$$

$$T_c > 0 \Rightarrow -3m * g * l + k * \Delta l^2 > \frac{m * g * l}{2}$$

$$k * \Delta l^2 > m * g * \frac{l}{2} + 3m * g * l \Rightarrow k\Delta l^2 > \frac{7m * g * l}{2}$$

$$\Rightarrow k > \frac{7m * g * l}{2\Delta l^2}$$

المسالة الخامسة :



تبدأ أسطوانة كتلتها 50kg في التركيبة الموضحة بالحركة من السكون نحو الأسفل عندها كان النابض تحت تأثير قوة شد مقدارها 45N المطلوب إيجاد سرعة الأسطوانة بعد أن تقطه مسافة 150mm

الحل:

تحسب سرعة الأسطوانة من تطبيق مبدأ العمل و الطاقة على الأسطوانة خلال انتقالها مسافة 150mm و لتطبيق هذا المبدأ يجب تحرير الجسم من قيوده:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_w + W_{F_k} + W_T$$

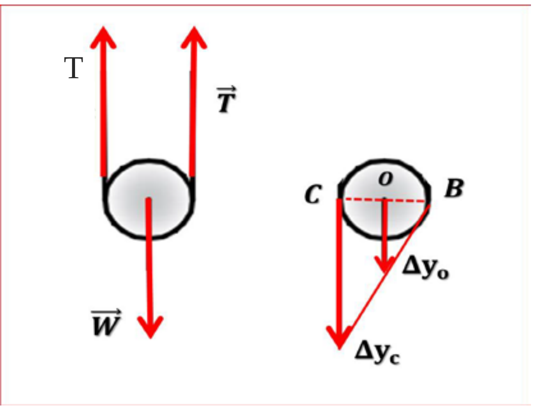
حيث: $v_B = 0 \Rightarrow W_T = 0$ و $v_0 = 0$

وعمل قوة الثقالة :

$$W_w = m\,g\,\Delta o = 50 * 9{,}81 * 0{,}15 = 73{,}575\ N.m$$

و عمل قوة النابض :

$W_{F_K} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$ حيث Δl_{in}^2 الاستطالة الابتدائية و تحسب من علاقة الشد للنابض:



$$F_{K_0} = k * \Delta l_{in} \Rightarrow \Delta l_{in} = \frac{F_{k_0}}{k} = \frac{45}{450} = 0{,}1\ m$$

و لدينا $\Delta l_{fin} = \Delta l_{in} + \Delta y_c$

حيث Δy_c تمثل انتقال النقطة C و يحسب من الدوران الآني للبكرة المهملة حول المركز اللحظي B و حسب الشكل نجد:

$$\frac{\Delta y_c}{2R} = \frac{\Delta y_o}{R} \Rightarrow \Delta y_c = 2\Delta y_o = 2 * 150 = 300mm = 0{,}3m$$

بالتعويض : $W_{F_k} = \frac{450}{2}[(0{,}1)^2 - (0{,}4)^2] = -33{,}75\ N.m$

بالتعويض في علاقة السرعة

$$\frac{50}{2}v^2 = 73{,}575 - 33{,}75 \Rightarrow v^2 = 1{,}593 m^2\backslash s^2 \Rightarrow v = 1{,}26 m\backslash s:$$

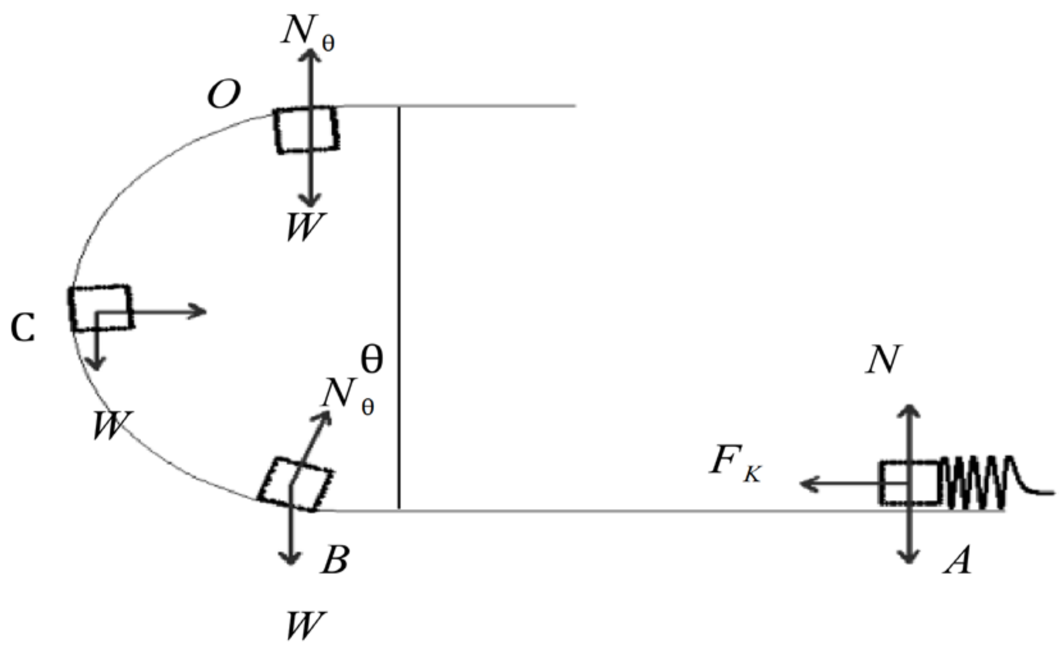
المسألة السادسة: /نابض يمس جسم/

وضع جسم على شكل عربة صغيرة كتلتها m في الموقع A بحيث يمس نابض مضغوط بمقدار Δl... يترك الجسم وشأنه لينزلق على سطح أملس BCD دائري نصف قطره R...

المطلوب:

1. علاقة سرعة الجسيم عند وضوله للموقع θ من المسار BCD $[v_\theta = ?]$
2. علاقة قوة القيد(قوة الضغط) في الموضع θ من المسار BCD $\{N_\theta = ?\}$
3. احسب قيمة k حتى يسقط الجسم على الحاجز E
4. احسب Δl حتى يسقط الجسم على الحاجز H

الحل:



لإيجاد علاقة السرعة عند الوضع θ من المسار BCD نطبق مبدأ العمل والطاقة على موضعين... A حيث $v_A = 0$
وθ حيث $v_\theta = ?$:

$$\frac{1}{2}m.v_\theta^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = \sum W_F = W_W + W_{N_\theta} + W_{F_k}$$

ولكن يوجد لدينا: $v_A = 0 \, , W_{N_\theta} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m.v_\theta^2 = \; -m.g.h + \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

ومن الشكل (2) : $h = R(1 - cos\theta)$

ملاحظة: الإشارة السالبة لعمل الثقل لأن شعاع الثقل بعكس جهة الحركة (أو إن العمل مقاوم)

* لدينا: $\Delta l_{in}^2 = \Delta l$

$$\Delta l_{fin}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m.v_\theta^2 = \; -m.g.R(1 - cos\theta) + \frac{k}{2}\,\Delta l^2$$

$$\Rightarrow v_\theta^2 = \frac{k}{m}\,\Delta l^2 - 2.g.R(1 - cos\theta)$$

2- لإيجاد N_θ نطبق العلاقة الأساسية في التحريك على الجسيم في الوضع θ على المسار BCD:

$$\sum\vec{F} = m.\vec{A}_\theta = \vec{W} + \vec{N_\theta}$$

بإسقاط العلاقة السابقة على المحور $\vec{n}$:

$$N_\theta - w.cos\theta = m.A^n$$

$$\Rightarrow N_\theta = w.cos\theta + m.A^n$$

$$\Rightarrow N_\theta = m(\frac{v_\theta^2}{R} + g.cos\theta)$$

بتعويض v_θ^2 في العلاقة السابقة:

$$N_\theta = m\left[\frac{1}{R}\left(\frac{k}{m}\Delta l^2 - 2g.R(1 - cos\theta) + g.cos\theta\right)\right]$$

$$N_\theta = m\left[\frac{k}{Rm}\Delta l^2 - 2g + 2gcos\theta + g.cos\theta\right]$$

$$N_\theta = \frac{k}{R}\Delta l^2 - 2m.g + 3m.g.cos\theta$$

$$N_\theta = \frac{k}{R}\Delta l^2 + m.g(3cos\theta - 2)$$

3- الحاجز E يوافق النقطة c حيث $\theta_c = 90°$

شرط السقوط على الحاجز E : $N_c = 0, v_c > 0$

$$v_c > 0 \Rightarrow -2gR(1 - cos\theta_c) + \frac{k}{m}\Delta l^2 > 0$$

$$\Rightarrow -2gR + \frac{k}{m}\Delta l^2 > 0 \Rightarrow \frac{k}{m}\Delta l^2 > 2gR \Rightarrow k > \frac{2g.R.m}{\Delta l^2}$$

وهو الشرط الاكبر لكي يتحقق المطلوب.

$$N_c = 0 \Rightarrow \frac{k}{R}\Delta l^2 + m.g(3cos\theta - 2) = 0$$

$$\frac{k}{R}\Delta l^2 - 2m.g = 0 \Rightarrow \frac{k}{R}\Delta l^2 = 2m.g \Rightarrow k = \frac{2m.R.g}{\Delta l^2}$$

4- الحاجز H يوافق النقطة D التي توافق $\theta_D = 180°$

الشروط اللازمة: $v_D > 0 , N_D = 0$

$$v_D > 0 \Rightarrow -2gR(1-cos\theta_D) + \frac{k}{m}\Delta l^2 > 0$$

$$-4gR = \frac{k}{m}\Delta l^2 > 0 \Rightarrow \Delta l^2 > \frac{4mgR}{k}$$

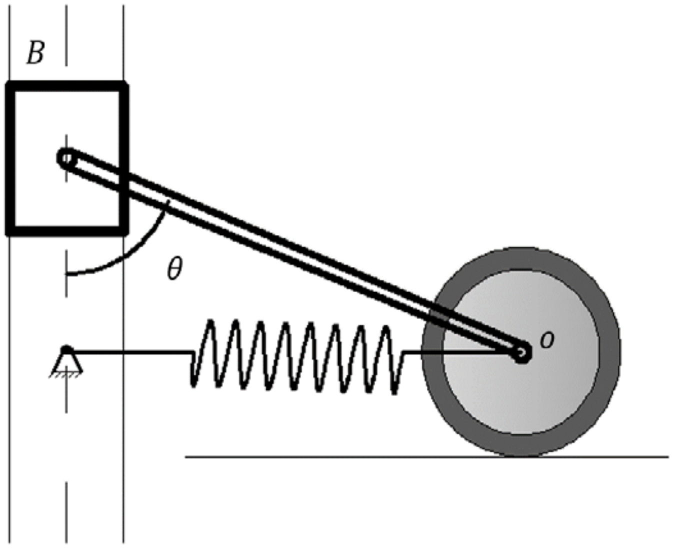
الشرط الاخر:

$$N_D = 0 \Rightarrow \frac{k}{R}\Delta l^2 + m.g(3cos\theta - 2) = 0$$

$$\frac{k}{R}\Delta l^2 - 5m.g = 0 \Rightarrow \Delta l^2 = \frac{5mgR}{k}$$

وهو الشرط الأقوى

المسألة السابعة: (السؤال الثالث دورة 2014 فصل أول)



تحتوي الجملة الميكانيكية الموضحة في الشكل على

دولاب كتلته $m_1 = 30\ kg$ نصف قطره $R =$

$150\ mm$ وعزم عطالته حول مركزه الهندسي O هو

$I_O = \frac{1}{2}m_1.R^2$ وعلى منزلقة B كتلتها $m_3 = 7\ kg$

وعلى وصلة متجانسة OB طولها $l = 375\ mm$ كتلتها

$m_2 = 10\ kg$ عزم عطالتها حول أحد أطرافها هو

$\frac{1}{3}m_2.l^2$ تصل بين الدولاب والمنزلقة روعلى نابض ثابت

صلابته $k = 1\ KN/m$ ....تبدأ المنزلقة

بالانزلاق من السكون بدون احتكاك على الدليل الأملس

الرأسي الثابت عندما كانت الوصلة OB محددة بالزاوية $\theta = 30°$ والنابض بطوله الحر.

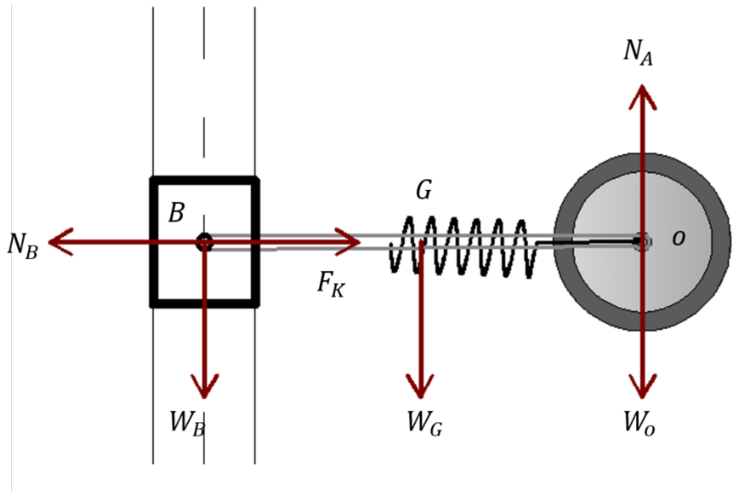
المطلوب:

فيما إذا كان الاحتكاك بين الدولاب والأرض الأفقية كافيا لمنع الدولاب من الانزلاق إيجاد ما يلي...

سرع عناصر الجملة عندما تصبح الوصلة OB بالوضع الأفقي وذلك يوافق $\theta = 90°$

الحل:

لإيجاد سرع عناصر الجملة نطبق مبدأ العمل والطاقة على المتمثلة بالدولاب المتحرك حركة مستوية عامة والوصلة OB المتحركة حركة مستوية عامة والمنزلقة B المتحركة



حركة انسحابية بين وضعين: الابتدائي الساكن المتمثل بالزاوية $\theta_0 = 30°$ إلى النهائي المتمثل بالزاوية $\theta_1 = 90°$:

$$E^1 - E^0 = \sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)}$$

في البداية نحدد المركز الأني في الوضع النهائي هندسيا ونحرر الجملة من قيودها فنجد المركز الأني للوصلة ينطبق على النقطة O مركز القرص ومنه $v_O = 0$ و $\omega_1 = 0$ حيث ω_1 هي السرعة الزاوية لدوران القرص ومنه :

$$E^1 = \frac{1}{2}m_2.v_G^2 + \frac{1}{2}I_G.\omega^2 + \frac{1}{2}m_3.v_B^2$$

حيث ω هي السرعة الزاوية لدوران الساق

ولدينا فرضا : $E^0 = 0$ في الوضع الابتدائي

ولدينا من علاقة هويغنز لنقل عزم العطالة:

$$I_O = I_G + m_2.\left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow I_G = I_O - m_2\frac{l^2}{4} = \frac{1}{12}m_2.l^2$$

وعن طريق المركز الأني لدينا:

$$v_G = \omega.\overline{OG} = \omega.\frac{l}{2} \ , v_B = \omega.\overline{OB} = \omega.l$$

ومنه :

$$E^1 = \frac{1}{2}m_2\left(\omega.\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_2.l^2\right).\omega^2 + \frac{1}{2}m_3(\omega.l)^2$$

$$E^1 = \frac{1}{8}m_2.l^2.\omega^2 + \frac{1}{24}m_2.l^2.\omega^2 + \frac{1}{2}m_3.l^2.\omega^2$$

$$E^1 = \frac{1}{6} l^2 . \omega^2 (m_2 + 3m_3)$$

$$\sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)} = W_{N_B} + W_{N_O} + W_{W_O} + W_{W_G} + W_{W_B} + W_{F_k}$$

حيث:

$W_{N_B} = W_{N_O} = W_{W_O} = 0$ (لأن القوة عمودية على الانتقال في كل لحظة)

$$W_{W_G} = m_2 . g . \frac{l}{2} . \cos\theta_0$$

$$W_{W_B} = m_3 . g . l . \cos\theta_0$$

$$W_{F_k} = \frac{k}{2} (\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

$$\Delta l_{in} = 0 \ , \Delta l_{fin} = l - l_0 = l - l . sin\,\theta_0 = l(1 - \sin\theta_0)$$

$$\sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)} = m_2 . g . \frac{l}{2} . \cos\theta_0 + m_3 . g . l . \cos\theta_0 - \frac{k}{2} . l^2 (1 - \sin\theta_0)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} . l^2 . \omega^2 (m_2 + 3m_3) = \frac{1}{2} g . l . \cos\theta_0 (m_2 + 2m_3) - \frac{k}{2} . l^2 (1 - \sin\theta_0)^2$$

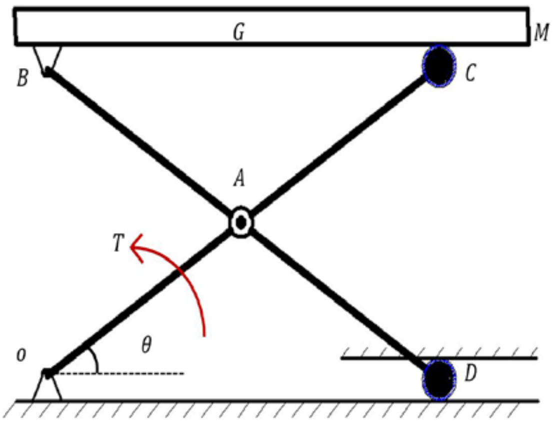
$$\omega^2 = \frac{3g}{l} \frac{m_2 + 2m_3}{m_2 + 3m_3} . \cos\theta_0 - \frac{3k(1 - \sin\theta_0)^2}{(m_2 + 3m_3)}$$

$$\omega^2 = \frac{3(9.81)}{0.375} \frac{10 + 2(7)}{10 + 3(7)} . \cos 30° - \frac{3(1000)(1 - \sin 30°)^2}{10 + 3(7)} = 29.94 \Rightarrow \omega = 5.472\ rad/s$$

$$v_B = \omega . l = 5.472 \times 0.375 = 2.05\ m/s$$

$$v_G = \omega . \frac{l}{2} = 5.472 \times \frac{0.375}{2} = 1.02\ m/s$$

المسألة الثامنة: (سؤال دورة 2009)



تتكون التركيبة الموضحة في الشكل من لوح كتلته $M =$ $2m$ ومن قضيبين متشابهين الأول OC والثاني DB يتصف كل منهما بكتلة m وبطول l وعزم عطالة حول مركز الثقل $I_A = \frac{1}{12}m.l^2$ حيث يتمفصلان مع بعضهما في مركزهما الهندسي والثقلي A ويتمفصل القضيب الأول بأحد أطرافه O مع الأرض الأفقية والطرف الأخر منه C يتمفصل مع مركز دولاب صغير مهمل يتدحرج على أسفل اللوح ويتمفصل القضيب الثاني بأحد أطرافه B مع اللوح والطرف الأخر منه D يتمفصل بمركز دولاب صغير مهمل يتدحرج على الأرض الأفقية....

يطبق على القضيب OC عزم ثابت قدره $T = m.g.l$ من الوضع $\theta = 0$ باتجاه عكس حركة عقارب الساعة إلى الوضع العام θ والمطلوب:

أوجد معادلتا الإحداثي الشاقولي لكل من الطرفين (C,B) ومركبتا سرعتيهما على المحور الشاقوليواستنتج منهن حركة اللوح.

1. أوجد المراكز اللحظية للقضيبين وأوجد معادلتا سرعتي النقطتين (A,B) وعلاقة السرعة الزاوية فيما بين القضيبين.
2. أوجد السرعة الزاوية لكلا القضيبين والسرعة الخطية للنقطتين (A,B) عند الوضع $\theta = 60°$.

الحل:

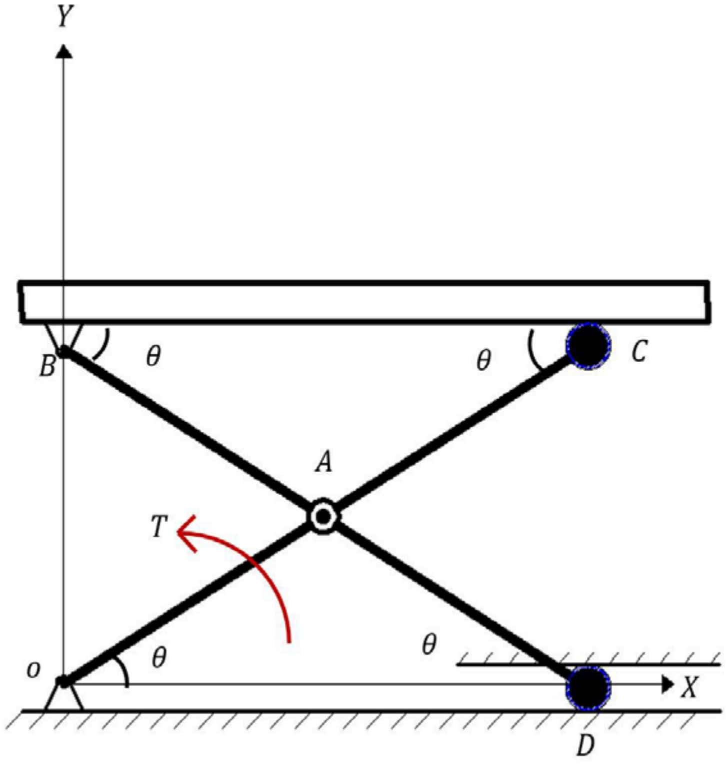
الطلب الأول:

نفرض جملة محاور إحداثية ثابتة OXY مبدؤها O كما في الشكل:

فتكون:

$$Y_C = \overline{OC}.\sin\theta \ , \quad Y_B = \overline{DB}.\sin\theta$$

$$\overline{OC} = \overline{DB} = l \Rightarrow Y_B = Y_C$$



وباشتقاق العلاقتين:

$$v_{B_Y} = v_{C_Y} = l.\cos\theta.\frac{d\theta}{dt} = l.\omega.\cos\theta$$

بما أن سرعة نقطتين من اللوح على المحور الشاقولي متساويتين ولدينا:

$$X_B = X_O = const = 0 \Rightarrow v_{B_X} = 0 \Rightarrow v_B = v_{B_Y}$$

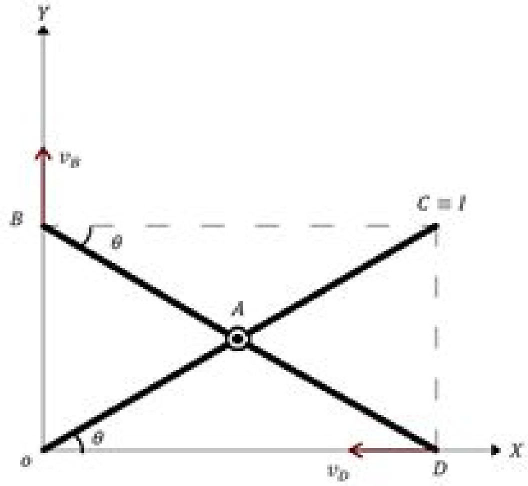
ومنه حركة اللوح انسحابية نحو الأعلى.

الطلب الثاني:القضيب OC حركته دورانية لا مركزية حول O وبالتالي O مركز دوران دائم للقضيب OC أما القضيب DB فحركته مستوية عامة... يتم إيجاد المركز اللحظي له هندسيا عن طريق تمديد عمودين على منحيي سرعتين من القضيب فنجدها تتقاطع في C في كل لحظة كما في الشكل: (من الطلب الأول)

$$v_A = \omega.\frac{l}{2}.cos\theta$$

(من المركز الاني)

$$v_A = \omega_1.\overline{AC} = \omega_1.\frac{l}{2}.cos\,\theta$$



وبالتالي:

$$\omega_1.\frac{l}{2}.cos\,\theta = \omega.\frac{l}{2}.cos\theta \Rightarrow \omega = \omega_1$$

حيث : ω_1 هي السرعة الزاوية لدوران القضيب DB أما ω هي السرعة الزاوية لدوران القضيب OC حول O

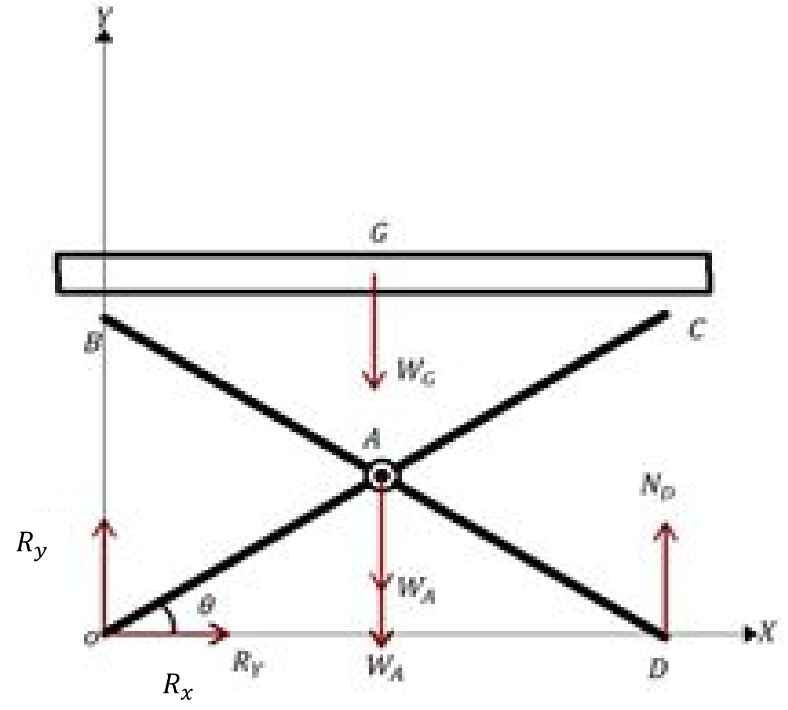
الطلب الثالث:

بتطبيق مبدأ العمل والطاقة على الجملة المتمثلة بال*1111* قضيب *OC* المتحرك حركة دورانية لا مركزية والقضيب *DB* المتحرك حركة مستوية عامة واللوح المتحرك حركة انسحابية بين وضعين...من الوضع الابتدائي الساكن المتمثل بالزاوية $\theta_0 = 0$ والوضع النهائي المتمثل بالزاوية $\theta_1 = 60°$:

$$E^1 - E^0 = \sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)}$$

$$E^0 = 0 \ , \qquad E^1 = \frac{1}{2} I_O . \omega^2 + \frac{1}{2} I_I . \omega_1^2 + \frac{1}{2} M . v_G^2$$

لإيجاد الأعمال نرسم مخطط الجسم الحر:



$$\sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)} = W_{R_{OX}} + W_{R_{OY}} + 2W_{W_A} + W_{W_G} + W_T$$

$$W_T = T . \theta_1 = m . g . l . \theta_1$$

$$2W_{W_A} = -2 . m . g . \frac{l}{2} . \sin\theta_1 = -m . g . l . \sin\theta_1$$

$$W_{W_G} = -M . g . l . \sin\theta_1 = -\, 2m . g . l . \sin\theta_1$$

$W_{R_{OX}} = W_{R_{OY}} = 0$ (لأن نقطة تأثير القوة لا تنتقل)

$$\Rightarrow \sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)} = -3m . g . l . \sin\theta_1 + m . g . l . \theta_1 \Rightarrow \sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)} = m . g . l(\theta_1 - 3\sin\theta_1)$$

ومن نظرية هويغنز لنقل عزم العطالة إلى محور الدوران:

$$I_O = I_I = I_A + m.d^2 = \frac{1}{12}m.l^2 + m.\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m.l^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m.l^2\right).\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m.l^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}M.v_G^2 = m.g.l(\theta_1 - 3\sin\theta_1)$$

$$\frac{1}{6}m.l^2(\omega^2 + \omega_1^2) + \frac{1}{2}(2m)\omega^2.l^2.\cos^2\theta_1 = m.g.l(\theta_1 - 3\sin\theta_1)$$

$$\frac{1}{3}m.l^2.\omega^2 + m.\omega^2.l^2.cos^2\theta = m.g.l(\theta_1 - 3\sin\theta_1)$$

$$\frac{1}{3}m.l^2.\omega^2(1 + 3cos^2\theta) = m.g.l(\theta_1 - 3\sin\theta_1)$$

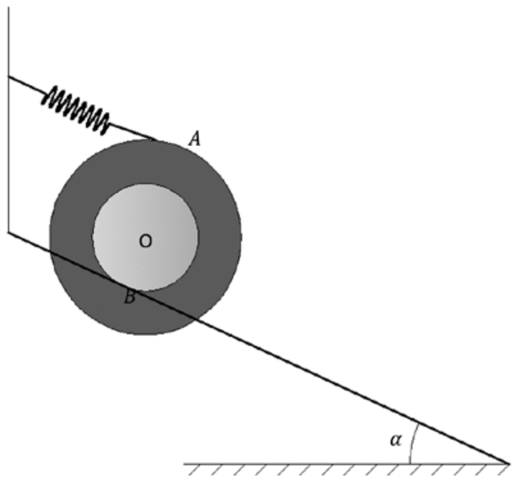
$$\omega^2 = \frac{3g}{l}.\frac{(\theta_1 - 3\sin\theta_1)}{(1 + 3cos^2\theta)}$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}.\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{1 + 3\times\frac{1}{4}} = \frac{g}{l}.\frac{4\pi - 18\sqrt{3}}{7}$$

$$v_C^2 = \omega^2.l^2 = g.l.\frac{4\pi - 18\sqrt{3}}{7}$$

$$v_B^2 = \omega_1^2.(\overline{CB})^2 = \omega^2.l^2.\cos^2\theta_1 = g.l.\frac{4\pi - 18\sqrt{3}}{7}.cos^2 60° = g.l.\frac{4\pi - 18\sqrt{3}}{28}$$

المسألة التاسعة



قرص مزدوج مركزه O قطره الكبير R ونصف قطره الصغير r كتلته M عزم عطالته حول مركزه الهندسي $I_O = \frac{1}{2}M.R^2$ يتصل من الأعلى بنابض ثابت صلابته k ويمس من الأسفل أرض مستوية خشنة مائلة بزاوية α فإذا بدأت الحركة من السكون.

1-أوجد عند انتقال مركز القرص مسافة ΔO ما يلي: سرع أجزاء القرص بدلالة انتقال مركزه..

الحل:

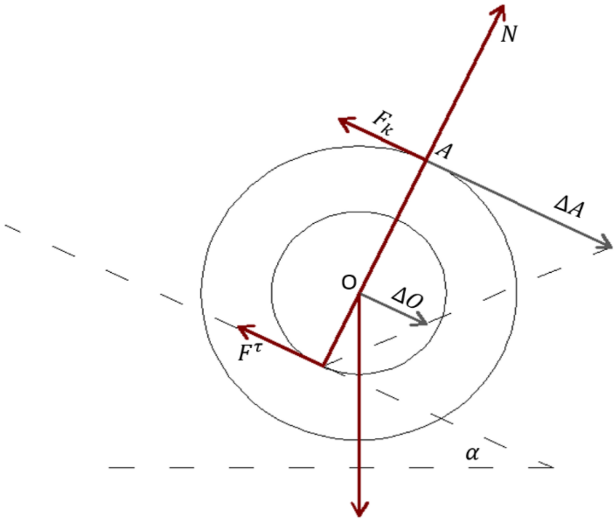
لإيجاد سرع أجزاء القرص نطبق مبدأ العمل والطاقة على القرص المتحرك حركة مستوية عامة بين وضعين... الوضع البتدائي الساكن والوضع المحدد بانتقال مركز القرص مسافة ΔO :

$$E^1 - E^0 = \sum W_{F(\Delta O)}$$

لدينا:

$$E^0 = 0 \, , E^1 = \frac{1}{2} M . v_O^2 + \frac{1}{2} I_o . \omega^2$$

لإيجاد القوى نحرر الجسم من قيوده:



(نحدد المركز الأني وهو النقطة الثابتة من القرص وهي نقطة التماس مع الأرض الثابتة)

(نستفيد من المركز الأني للربط بين المتغيرات كالسرعة الخطية والزاوية والانتقال الخطي والانتقال الزاوي كما سنرى في هذه المسألة)

$$\sum W_{F(\Delta O)} = W_W + W_N + W_{F_k} + W_{F^\tau}$$

$W_{F^\tau} = 0 \quad , W_N = 0$ (لأن القوة عمودية على الانتقال في كل لحظة)

$$W_W = M . g . H_O = M . g . \Delta O . \sin \alpha$$

$$W_{F_k} = \frac{k}{2} (\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

$$\Delta l_{in} = 0 \, , \Delta l_{fin} = \Delta A$$

من المركز الأني:

$$\frac{\Delta A}{AB} = \frac{\Delta O}{OB} \Rightarrow \Delta A = \frac{AB}{OB} . \Delta O = \frac{R + r}{r} \Delta O$$

$$v_O = \omega . BO = \omega . r$$

$$W_{F_k} = -\frac{k}{2} \left(\frac{R + r}{r} \right)^2 (\Delta O)^2$$

نعوض في علاقة مبدأ لعمل والطاقة:

$$\frac{1}{2}M.(\omega^2.r^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M.r^2\right).\omega^2=M.g.\Delta O.\sin\alpha-\frac{k}{2}\left(\frac{R+r}{r}\right)^2(\Delta O)^2$$

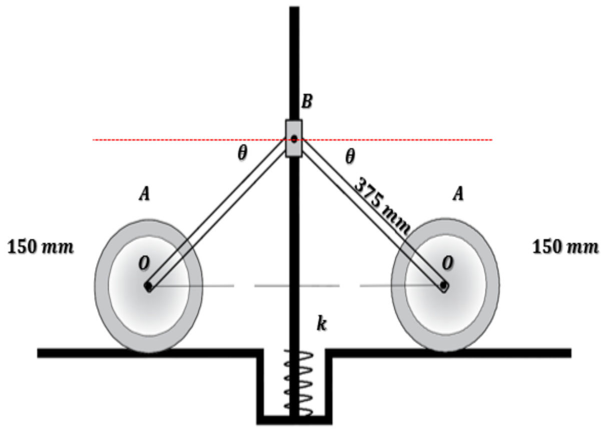
$$M.\omega^2r^2=M.g.\Delta O.\sin\alpha-\frac{k}{2}\left(\frac{R+r}{r}\right)^2(\Delta O)^2$$

$$\omega^2=\frac{g}{r^2}.\Delta O.\sin\alpha-\frac{k}{2M}.\frac{(R+r)^2}{r^4}.(\Delta O)^2$$

$$v_O=\omega.r$$

$$\Rightarrow v_O^2=g.\Delta O.\sin\alpha-\frac{k}{2M}.\left(\frac{R+r}{r}\right)^2(\Delta O)^2$$

المسألة العاشرة:



تحتوي الجملة الميكانيكية الموضحة في على عجلتين كتلة كل منهما (M=30 kg) , ونصف قطرها (R=150 mm) ونصف قطر عطالتها حول مركزها الهندسي O $(\rho_O=100\ mm)$ وعلى,

وصلتين كتلة كل منهما $(m_1=10\ kg)$ وطولها (375= mm) وعزم عطالتها حول أحد أطرافها هو $[I_O=(1/3)(m_1.l^2)]$, وعلى جلبة كتلتها $(m_2=7\ kg)$ ونابض عامل مرونته (k=30kN/m)

تبدأ الجلبة بالانزلاق دون احتكاك من السكون من الوضع الابتدائي المحدد بالزاوية (θ=45) على العمود الرأسي الثابت ,لتمس النابض عندما تصبح الوصلتين في وضع أفقي , فإذا كان الاحتكاك كافيا لمنع العجلتين من الانزلاق على السطح الافقي

المطلوب:

1. سرعة الجلبة لحظة تماسها النابض والانضغاط الاعظمي للنابض .

الحل :

لايجاد سرعة الجلبة لحظة تماسها النابض نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة الحرة , من الوضع الابتدائي θالساكن المحدد بالزاوية 45= الى الوضع الذي تصبح فيه الوصلتان في وضع افقي (θ=0) .

$$E_c^{\theta=0}=E_c^{\theta=45}+\sum W_k^e$$

حيث $E_c^{\theta=45}$ الطاقة الحركية للجملة عند $\theta=45$ وتساوي الى : $E_c^{\theta=45}=0$

$E_c^{\theta=0}$ الطاقة الحركية للجملة عند $\theta=0$ وتساوي الى :

$$E_c^{\theta=0} = E_{Wh}^{\theta=0} + E_{Li}^{\theta=0} + E_{co}^{\theta=0}$$

حيث $E_{Wh}^{\theta=0}$ الطاقة الحركية للعجلات وتساوي الصفر ,لأنها تنتهي لحظيا بالسكون عند $\theta = 0$ و $E_{Li}^{\theta=0}$ الطاقة الحركية للوصلتين OB حيث كل منهما تدور لحظيا بسرعة زاوية w حول النقطة O عند θ=0

وتساوي الى : $E_{Li}^{\theta=0} = 2\left[\frac{1}{2}I_O.w^2\right] = \frac{1}{3}m_1 l^2.\frac{v_B^2}{l^2} = \frac{1}{3}m_1.v_B^2$

بالتعويض : $E_{Li}^{\theta=0} = 3.33v_B^2$

و $E_{co}^{\theta=0}$ الطاقة الحركية للجلبة التي تتحرك حركة انسحابية حتى الوضع θ=0 وتساوي الى :

$$E_{co}^{\theta=0} = \frac{1}{2}m_2 v_B^2 = 3.5v_B^2$$

و$\sum W_k^e$ مجموع أعمال القوى المؤثرة على الجملة الحرة :

$$\sum W_k^e = W_{Ff} + W_N + W_{Wwh} + W_{Wli} + W_{Wco}$$

حيث : $W_{Ff} = 0 \qquad W_N = 0 \qquad W_{Wwh} = 0$

W_{Wli} عمل قوة الثقالة ويساوي :

$$W_{Wli} = 2m_1.g.OG_1.cos45 = 26.01\ N.m$$

و W_{Wco} عمل قوة الثقالة للجلبة ويساوي :

$$W_{Wco} = m_2.g.OB.cos45 = 18.21\ N.m$$

بالتعويض في علاقة مبدأ العمل والطاقة :

$$3.33v_B^2 + 3.5v_B^2 = 26.01 + 18.21$$

منه : $v_B^2 = 6.47\ m^2/sec^2 \implies v_B^2 = 2.54\ m/sec$

لإيجاد الانضغاط الاعظمي للنابض Δl والتي تساوي المسافة التي تقطعها الجلبة حتى تقف خلال تماسها بالنابض , نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة الحرة من الوضع الابتدائي الساكن المحدد بالزاوية θ=45 الى الوضع النهائي الساكن :

$$E_c^{fin} = E_c^{ini} + \sum W_k^e$$

حيث : $E_c^{fin} = E_c^{ini} = 0 \qquad \Longrightarrow \sum W_k^e = W_{Fk} + W_{Wli} + W_{Wco} = 0$

و W_{Fk} عمل قوة مرونة النابض , ويحسب من العلاقة : $W_{Fk} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$

حيث : $\Delta l_{in}^2 = 0 \qquad \Delta l_{fin}^2 = \Delta l$

منه بالتعويض : $W_{Fk} = -\frac{k}{2}\Delta l^2 = -15000\Delta l^2$

و W_{Wli} تساوي الى :

$$W_{Wli} = 2m_1.g\left(OG_1.cos45 + \frac{\Delta l}{2}\right) = 26.01 + 98.1\Delta l$$

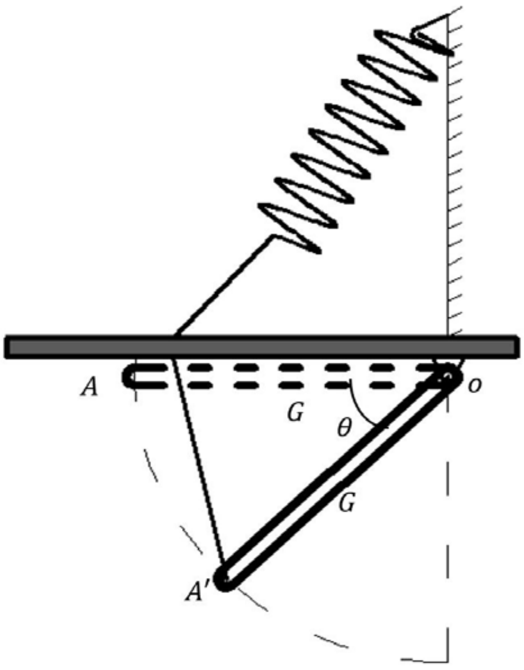
و W_{Wco} تساوي الى :

$$W_{Wli} = m_2.g(OB.cos45 + \Delta l) = 18.21 + 68.67\Delta l$$

بالتعويض نحصل على : $15000\Delta l^2 + 166.77\Delta l - 44.22 = 0$

معادلة من الدرجة ل Δl بحلها نحصل على : $\Delta l = \mathbf{60\ mm}$

المسألة الحادية عشر:



قضيب رفيع متجانس طوله l كتلته m وعزم عطالته حول أحد أطرافه $I_O = \frac{1}{3}m.l^2$ يتمفصل طرفه في المسند الثابت O وطرفه الأخر يرتبط بحبل ونابض عبر بكرة ثابتة مهملة كما في الشكل.... يبدأ القضيب `حركته من السكون من الوضع الأفقي له حيث $\theta = 0°$ عندها كان النابض بطوله الحر

المطلوب:

1. أوجد عامل صلابة النابض بحيث تكون السرعة الزاوية للقضيب معدومة عند وصوله للوضع الشاقولي حيث $\theta = 90°$
2. أوجد مركبتي رد الفعل في O عند نفس الوضع $\theta = 90°$

الحل:

نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة المتمثلة بالقضيب المتحرك حركة دورانية لا مركزية حول O بين وضعين...

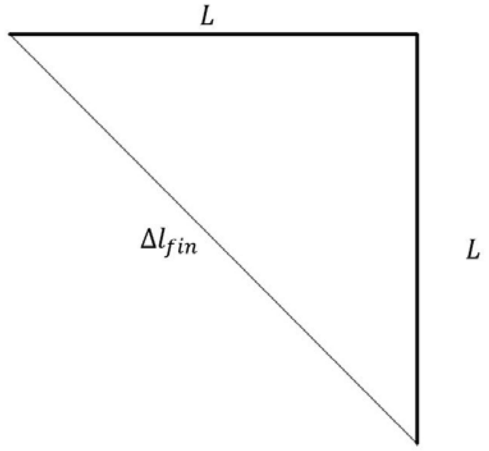
الوضع الابتدائي الساكن المتمثل بالزاوية $\theta_0 = 0°$ والوضع العام $\theta_1 = 90°$

$$E^1 - E^0 = \sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)}$$

$$E^0 = 0 \, , E^1 = \frac{1}{2} I_O . \omega^2$$

$$\sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)} = W_{R_X} + W_{R_Y} + W_W + W_{F_k}$$

$W_{R_X} = W_{R_Y} = 0$ (لأن القوة عمودية على الانتقال في كل لحظة)



$$W_W = m.g.H_G = m.g.\frac{l}{2}$$

ملاحظة: (لو كان الدراسة عند وضع عام θ_1 لكان $H_G = \frac{l}{2}.\sin\theta_1$)

$$W_{F_k} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

بطوله الحر$\Delta l_{in} = 0 \, , \Delta l_{fin} = AA' = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2}l$

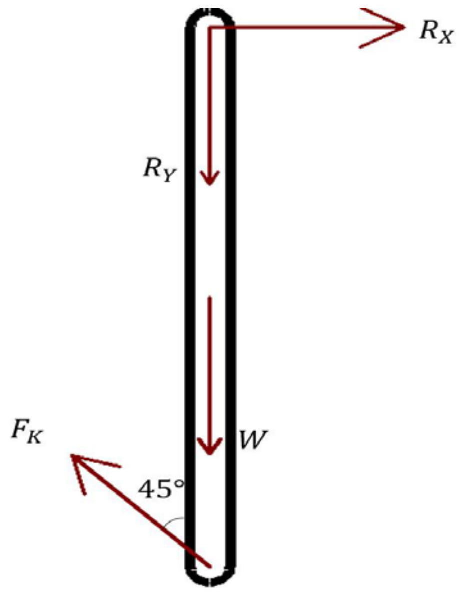
ملاحظة: لو كان الوضع المدروس هو الوضع العام لكان :

$$(AA')=l^2+l^2-2l^2.\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I_O.\omega^2=m.g.\frac{l}{2}-\frac{k}{2}\left(\sqrt{2}l\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m.l^2\right).\omega^2=\frac{1}{2}m.g.l-k.l^2$$

$$\Longrightarrow \omega^2=\frac{3g}{l}-\frac{k}{6m}$$



في هذه الوضع يجب أن تكون السرعة **معدومة** (حسب فرض المسألة):

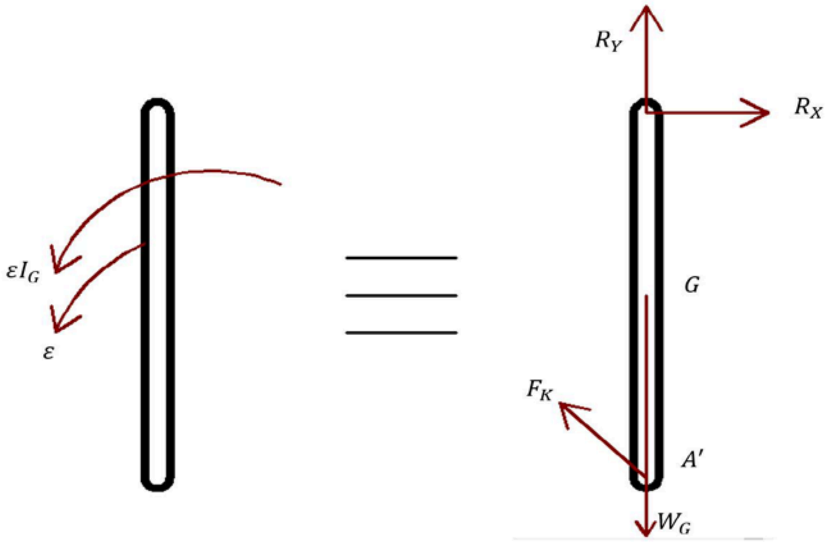
$$\Rightarrow 0=\frac{3g}{l}-\frac{k}{6m}\Longrightarrow\frac{k}{6m}=\frac{3g}{l}\Longrightarrow k=\frac{18mg}{l}$$

لإيجاد مركبات ردود أفعال المسند نطبق علاقات المجموعة المكافئة على القضيب المتحرك حركة دورانية لا مركزية حول O

$$I.....0=\sum\overrightarrow{F_O^e}$$

$$II....I_O.\vec{E}=\overrightarrow{M_O^e}$$

لتوضيح العلاقتين نرسم مخططاتها:



المجموعة المكافئة للقوى الفاعلة	≡	القوى الفاعلة

وبإسقاط العلاقة الأولى:

$$1....\rightarrow +: R_X-F_k.\sin 45°=0$$

$$2....\uparrow. R_Y+F_k.\cos 45°-W_W=0$$

من المعادلة 1:

$$R_X=k.\Delta l_{fin}.\sin 45°=k.\sqrt{2}l.\frac{1}{\sqrt{2}}=k.l$$

ومن المعادلة 2:

$$R_Y = W_W - F_k.\cos 45° = m.g - k.l$$

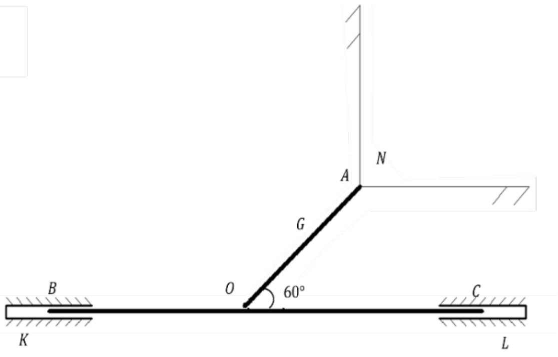
المسالة الثانية عشر:

قضيب متجانس $(\mathbf{OA})$ طوله $\boldsymbol{l}$ كتلته m ومركز ثقله G يقع في منتصفه.

يستند طرفه A إلى حافة جدار ثابت N بحيث يميل عن الأفق زاوية $60°$.

يتصل طرفه الآخر بجائز BC كتلته $3m$ قادر على الحركة أفقياً.

يترك القضيب OA بعد تحريره عن حافة الجدار ليسقط على الجائز BC



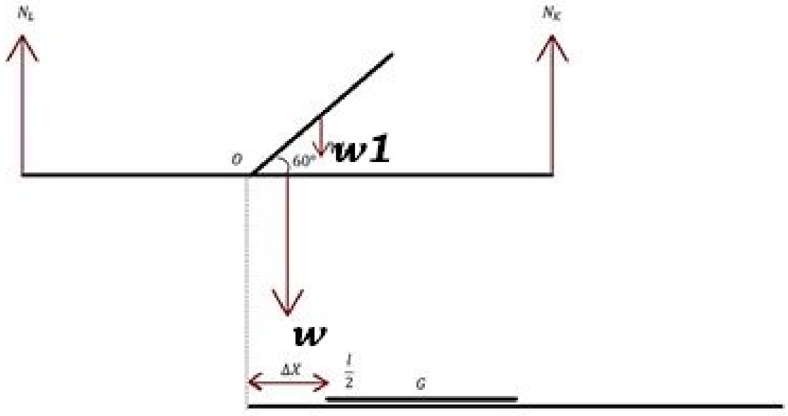
المطلوب:

مقدار اتجاه إزاحة عند انطباق القضيب عليه أي عندما $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$.

الحل:

نلاحظ أن جميع القوى المؤثرة على المجموعة (جائز +قضيب) وهي N_K, N_L, W_1, W عامودية على منحى الحركة

وليكن OX ⇐ هناك انحفاظ في كمية الحركة .



$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \Sigma I$$

بلإسقاط على منحى الحركة:

$$Q = 0$$

$$\Rightarrow q + q_1 = 0$$

$$3m.v + m.v_1 = 0$$

$$3m\frac{dx}{dt} + \mathrm{m}\frac{dx_1}{dt} = 0$$

نكامل:

$$3m\Delta x + m\Delta x_1 = 0$$

نفرض: Δx انتقال الجائز نحو اليمين $\xrightarrow{+}$

$$\Delta x_1 = x_{11} - x_{10}$$

$$x_{11} = \Delta x + \frac{l}{2}$$

$$x_{10} = \frac{l}{2}\big(cos(60)\big)$$

نعوض:

$$3m.\Delta x + m\left(\Delta x + \frac{l}{2}(1 - cos60)\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \Delta x = \frac{m(cos(60) - 1).\frac{l}{2}}{3m + m}$$

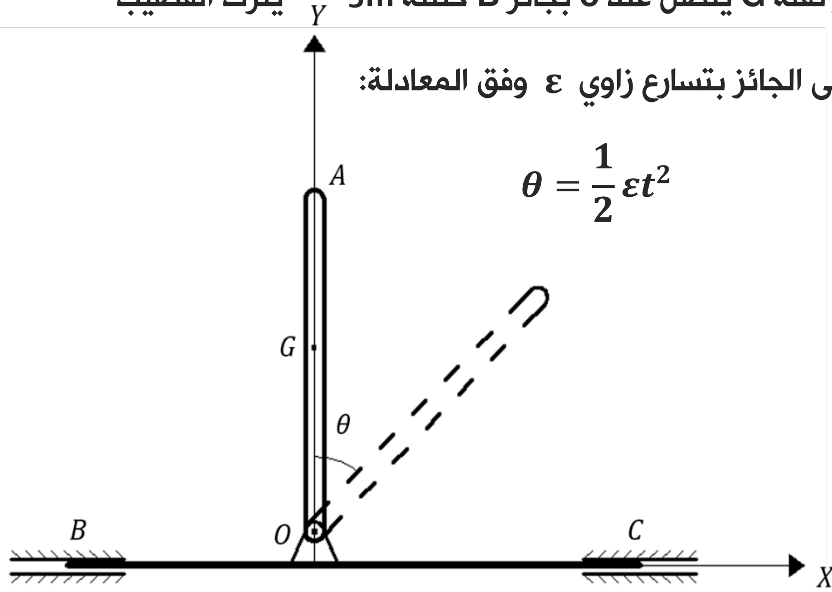
$$\Delta x = \frac{(cos(60) - 1)}{4}\frac{l}{2} = -\frac{l}{16}$$

ملاحظة هامة: الانتقال هنا عكس الاتجاه المفروض.

المسألة الثالثة عشر:

قضيب متجانس طوله 2l كتلته m مركز ثقله G يتصل عند o بجائز B كتلته 3m يترك القضيب وشأنه من الموضع الشاقولي ليسقط على الجائز بتسارع زاوي ε وفق المعادلة:

$$\theta = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$



عند الوضع العامθ ما يلي:

علاقة سرعة الجائز بدلالة θ ؟

علاقة انتقال الجائز بدلالة θ ؟

القيمة العظمى لكل منحى ومواقعها؟

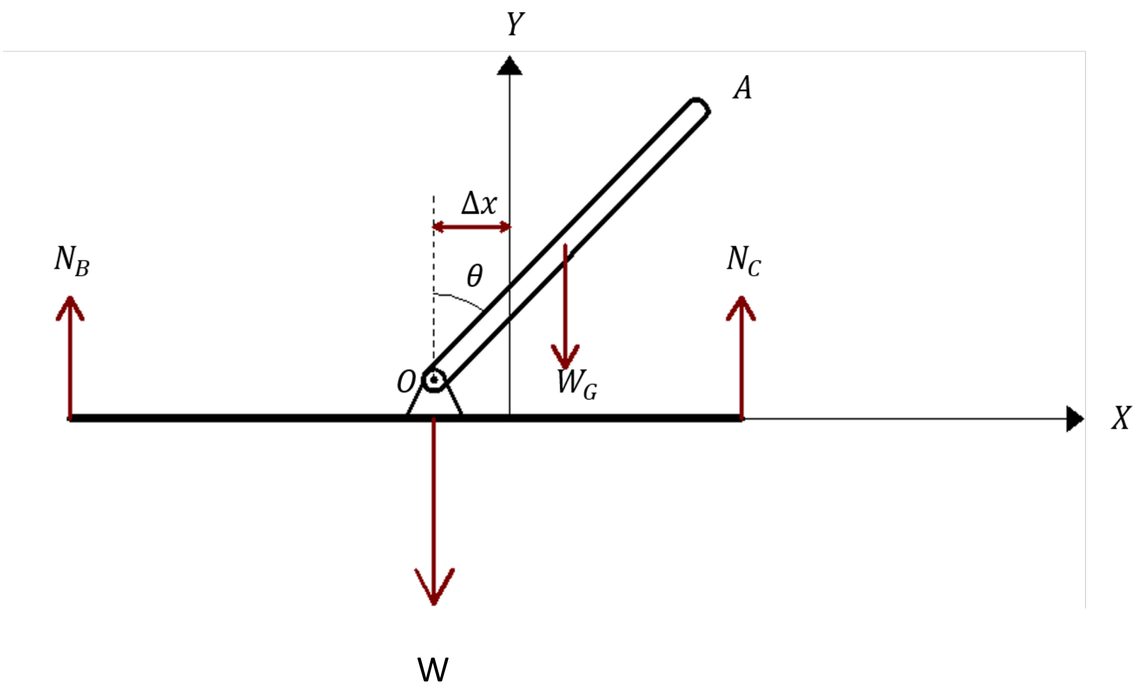
الحل:

نلاحظ أن جميع القوى المؤثرة على الجملة (جائز_قضيب)

عمودية على منحى الحركة وبالتالي من خلال انحفاظ في كمية الحركة

$$\vec{Q}_{\vec{Q_0}} = \vec{I_w} + I_{w_1} + I_{R_B} + I_{R_c}$$

بالإسقاط على منحى الحركة:



$$Q_x = 0$$

$$q + q_1 = 0$$

$$3m.v + m.v_{x_1} = 0$$

بفرض v سرعة الجائز نحو اليمين والسرعة الخطية مماسية عند مركز الثقل ونسقطها على x

$$v_{x_1} = v_{r_1} + v_{e_1}$$

$$v_e = v$$

$$v_{r_x} = w.l\,.\cos\theta \rightarrow w = \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_{r_x} = t.\varepsilon l\,\cos\theta$$

نعوض:

$$v_{x_1} = v + \varepsilon.t.l.\cos\theta$$

$$3m.v + m(v + \varepsilon tl.\cos\theta) = 0$$

$$v = -\frac{m\varepsilon.tl.\cos\theta}{4m}$$

والاتجاه عكس الاتجاه المفروض. والقيمة العظمى عندما $\cos\theta = 1 \rightarrow \theta = 0$

في المقطع الشاقولي:

$$3mv + m.v_1 = 0$$

$$3m.\frac{dx}{dt} + m.\frac{dx_1}{dt} = 0$$

$$3m.\Delta x + m.\Delta x_1 = 0$$

نفرض انتقال الجائز نحو اليمين:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$

إحداثي مركز ثقل القضيب النهائي $\Delta x_1 = \Delta x + l.\sin\theta$

$$x_0 = 0$$

نعوض:

$$3m\Delta x + m(\Delta x + l sin\theta) = 0$$

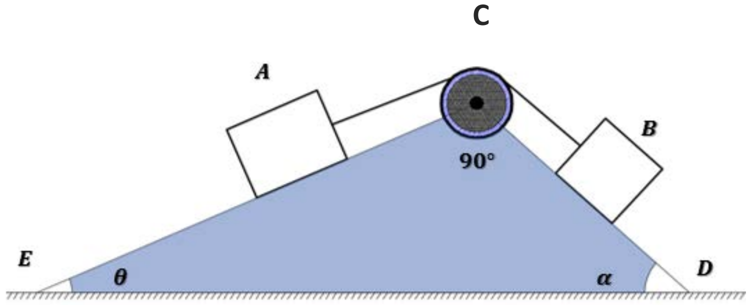
$$\Delta x = \frac{-m.l.sin\theta}{4m}$$

والاتجاه عكس الاتجاه المفروض .

نحصل على القيمة العظمى عندما $sin\theta = 1$ اي عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$

في الوضع الأفقي

مسألة الرابعة عشر :



جسيمان A و B وزنهما على التوالي W_B و W_A , يتصلان بواسطة حبل غير قابل للاستطالة يمر عبر بكرة مهملة C , بحيث ينزلق الجسيمان على الجانبين الأملسين للإسفين ECD قائم الزاوية وزنه W و مركز كتله G , و يرتكز قاعدته DE على مستوي أفقي أملس , كما هو موضح في الشكل , و المطلوب باعتبار أن الجملة كانت ساكنة في البدء :

مقدار و اتجاه انتقال الإسفين على المستوي الأفقي عند انزلاق الجسيم A لمسافة قدرها Δs_A مهملاً كتلة كل من البكرة والحبل .

مقدار انتقال الإسفين باستخدام القيم التالية : $(\Delta s_A = 20cm)$, $(\theta = 30)$,$(W = 4W_A = 16W_B)$

الحل :

نلاحظ أن القوى المؤثرة على الجملة و المكونة من W و W_B و W_A و المركبة الناظمية لقوة الاتصال مع المستوي الأفقي N , و هي عمودية على محور حركة الإسفين X المفروض من E إلى D , لذا نستخدم علاقة مسقط تغير كمية الحركة لجملة على المحور X لإيجاد انتقال الإسفين , حيث نحصل على :

$$\sum F_x^e = 0 \rightarrow \sum I_x^e = 0 \rightarrow Q_{1x} - Q_{0x} = 0$$

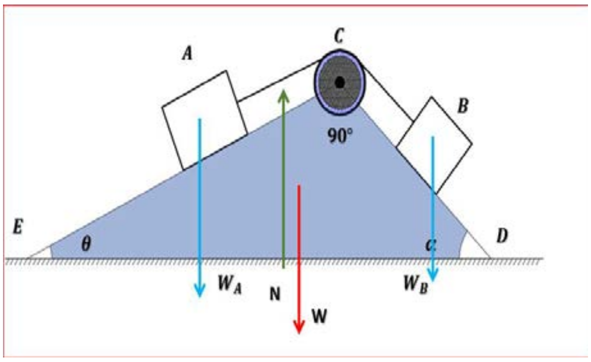
و بما أن $Q_{0x} = 0 \rightarrow Q_{1x} = 0 \rightarrow q_{Ax} + q_{Bx} + q_{Gx} = 0$

بالتعويض نحصل على العلاقة

$$m_A.V_{Ax} + m_B.V_{Bx} + m.V_{Gx} = 0$$

التي تكتب بالشكل :

$$\frac{W_A}{g}.\frac{dx_A}{dt} + \frac{W_B}{g}.\frac{dx_B}{dt} + \frac{W}{g}.\frac{dx_G}{dt} = 0$$



منه نحصل على : $W_A.\Delta x_A + W_B.\Delta x_B + W.\Delta x_G = 0$

حيث Δx_G تمثل الانتقال الأفقي للإسفين , و نفرضه باتجاه محور الحركة .

و Δx_A تمثل الانتقال الأفقي للجسيم A و يساوي إلى :

$$\Delta x_A = \Delta x_{Ar} + \Delta x_{Ae}$$

$$\Delta x_A = -\Delta s_A.\cos\theta + \Delta x_G$$

و Δx_B تمثل الانتقال الأفقي للجسيم B و يساوي إلى :

$$\Delta x_B = \Delta x_{Br} + \Delta x_{Be}$$

$$\Delta x_B = -\Delta s_B.\cos\alpha + \Delta x_G$$

و بما أن الخيط لا يمتط :

$$\Delta s_A = \Delta s_B$$

منه $\Delta x_B = -\Delta s_A.\sin\theta + \Delta x_G$

بالتعويض :

$$W_A(\Delta x_G - \Delta s_A.\cos\theta) + W_B(\Delta x_G - \Delta s_A.\sin\theta) + W.\Delta x_G = 0$$

$$(W_A + W_B + W)\Delta x_G = (W_A.\cos\theta + W_B.\sin\theta)\Delta s_A$$

نحصل على : القيمة الموجبة تدل على أن اتجاه الحركة من اتجاه المحور $\Delta x_G = \frac{(W_A.\cos\theta + W_B.\sin\theta)}{(W_A + W_B + W)}\Delta s_A$

بالتعويض نجد :

$$\Delta x_G = \frac{\left(\frac{W_A}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{W_B}{16}.\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{W}{4} + \frac{W}{16} + W\right)}20$$

$$\Delta x_G = \frac{0.2165 + 0.03125}{0.25 + 0.0625 + 1}20 = 3.78cm$$

المسألة الخامسة عشر:

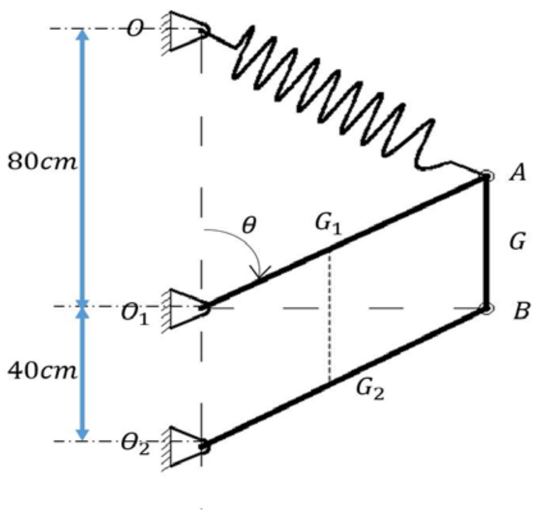
1) اكتب علاقة الطاقة الحركية لجسم يتحرك حركة انسحابية واذكر نصها.

اكتب علاقة الطاقة الحركية لجسم يتحرك حركة دورانية حول محور ثابت Δ واذكر نصها.

2) تحوي الجملة الميكانيكية المتوضعة في المستوي الشاقولي الموضحة في الشكل:

على قضيبين متجانسين متشابهين كتلة كل منهما ($m_1 = 4\ kg$),طوله ($l_1 = 80\ cm$),وعزم عطالته حول أحد أطرافه هو($m_1 . l_1^2/3$),وعلى قضيب ثالث متجانس كتلته ($m_2 = 2\ kg$), طوله ($l_2 = 40\ cm$) متمفصل مع القضيبين في A و B كما في الشكل,وعلى نابض طوله الحر ($l_0 = 80\ cm$) وعامل صلابته ($K = 100 N/m$),مرتبط طرفه عند A وطرفه الآخر بالمسند الثابت O.

تبدأ الجملة حركتها من السكون بتأثير قوى الثقالة عندما كان القضيب O_1A محدد بالزاوية($\theta = 60^{\circ}$)والنابض بطوله الحر.إذا علمنا ان مراكز كتل القضبان الثلاثة تقع في منتصف أطوالها.



المطلوب:

1- استنتج من الشكل مع التعليل نوع حركة القضيب AB.

2_ أوجد سرع عناصر الجملة عندما يصبح القضيب O_1A بوضع أفقي ($\theta = 90^{\circ}$).

الحل:

الطلب الأول:

بما أن O_1A حركته دورانية لامركزية حول O_1 وحركة O_2B دورانية لامركزية حول O_2 ولدينا:

$l = O_1A = O_2B$ و O_1 و O_2 على استقامة واحدة وبالتالي حركة AB انسحابية على مسار منحني حيث يرسم مركز كتلته مسار دائري

الطلب الثاني:

نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة المتمثلة بالقضبان الثلاث AB, O_2B, O_1A بين وضعين

الوضع الابتدائي الساكن المتمثل بالزاوية $\theta = 60^{\circ}$ والوضع النهائي المتمثل بالزاوية $\theta = 90^{\circ}$

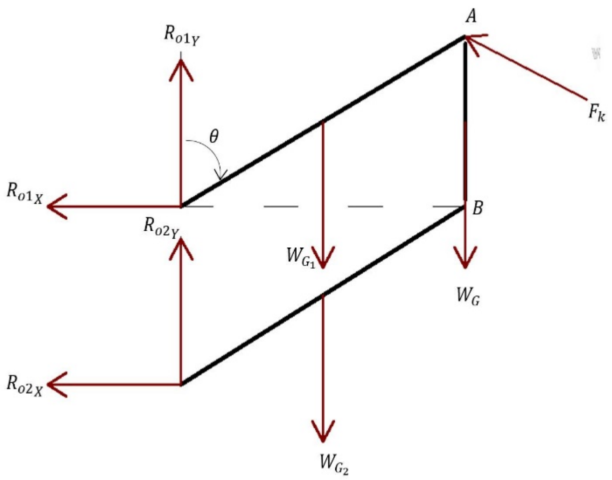
$$E_1 - E_0 = \Sigma W^{e}_{F(\theta_0 \to \theta_1)}$$

حيث:
$$E_0 = 0$$

$$E_1 = \frac{1}{2} I_{O_1}.\omega^2 + \frac{1}{2} I_{O_2}.\omega^2 + \frac{1}{2} m.v_O^2$$

$$\Sigma W_F = W_{R_{O_1}} + W_{R_{O_{1y}}} + W_{R_{O_{2x}}} + W_{R_{O_{2y}}} + W_{W_G} + W_{W_{G_1}} + W_{W_{G_2}} + W_{F_k}$$

$$W_{W_G} = W_G.l.cos\theta_0$$



$$W_{W_{G_1}} = W_{G_1}.\frac{l}{2}.cos\theta_0$$

$$W_{W_{G_2}} = W_{G_2}.\frac{l}{2}.cos\theta_0$$

$$W_{F_k} = \frac{K}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{Fin}^2)$$

$$\Delta l_{in} = 0 \quad ,\Delta l_{Fin} = \sqrt{l_1^2 + h^2} - l_0$$

حيث: $l_1 = l_0 = h$

$$\Rightarrow \quad \Delta l_{Fin} = l_1(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Rightarrow \quad W_{F_k} = -\frac{K}{2} l_1^2 (\sqrt{2} - 1)^2$$

بالتعويض وباعتبار $I_{O_1} = I_{O_2}$:

$$\frac{1}{3} m_1.l_1^2.\omega^2 + \frac{1}{2} m_2.v_G^2 = (m_1 + m_2)g.l.cos\theta_0 - \frac{K}{2} l_1^2 (\sqrt{2} - 1)^2$$

لدينا من حركة AB الانسحابية:

$$v_G = v_A = v_B = \omega.l$$

من الفرض $m_2 = \frac{1}{2} m_1$:

$$\Rightarrow \frac{1}{3} m_1.l_1^2.\omega^2 + \frac{1}{4} m_2.\omega^2.l_1^2 = (m_1 + m_2)g.l.cos\theta_0 - \frac{K}{2} l_1^2 (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{7}{12} m_1.l_1^2.\omega^2 = \frac{3}{2} m_1.g.l_1.cos\theta_0 - \frac{K}{2} l_1^2 (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{18}{7}\frac{g}{l_1}.cos\theta_0 - \frac{6K}{7m_1}(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$\omega^2 = \frac{18}{7}\frac{9,81}{0,8}.cos60^\circ - \frac{6*100}{7*4}(\sqrt{2}-1)^2$$

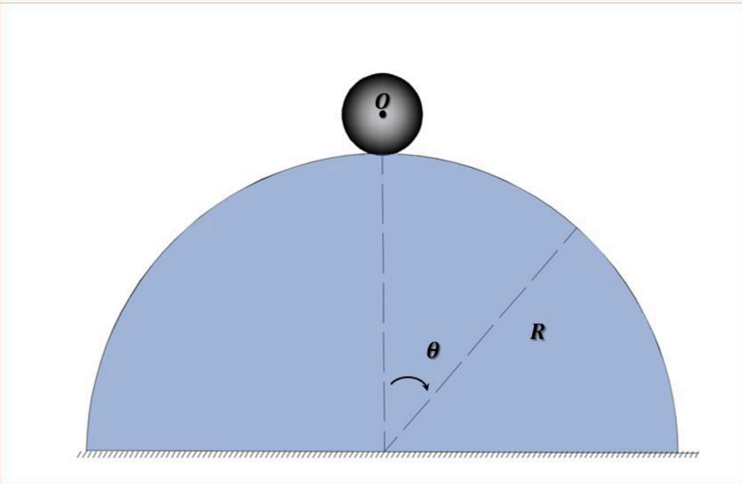
$$\Rightarrow \quad \omega = 3,5\ (rad.s^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad v_G = \omega.l = 2,8\ (m.s^{-1})$$

$$v_{G_1} = v_{G_2} = \omega.\frac{l}{2} = 1,4\ (m.s^{-1})$$

المسألة السادسة عشر:

دولاب متجانس كتلته m نصف قطره r و عزم عطالته حول مركزه الهندسي o هو $I_O = m.r^2/2$ يترك ليتدحرج من السكون على سطح خشن ثابت على شكل نصف كرة مركزها o_1 و نصف قطرها R=8r من الوضع الحرج الشاقولي المعين بـ $(\theta_0 = 0)$ نحو اليمين , كما هو مبين بالشكل .



المطلوب:

إيجاد بدلالة الوضع الزاوي θ كل من التسارع الخطي و الزاوي للدولاب , و مركبتي رد الفعل الناظمية و المماسية , و الموقع الذي يترك فيه الدولاب السطح الدائري .

الحل :

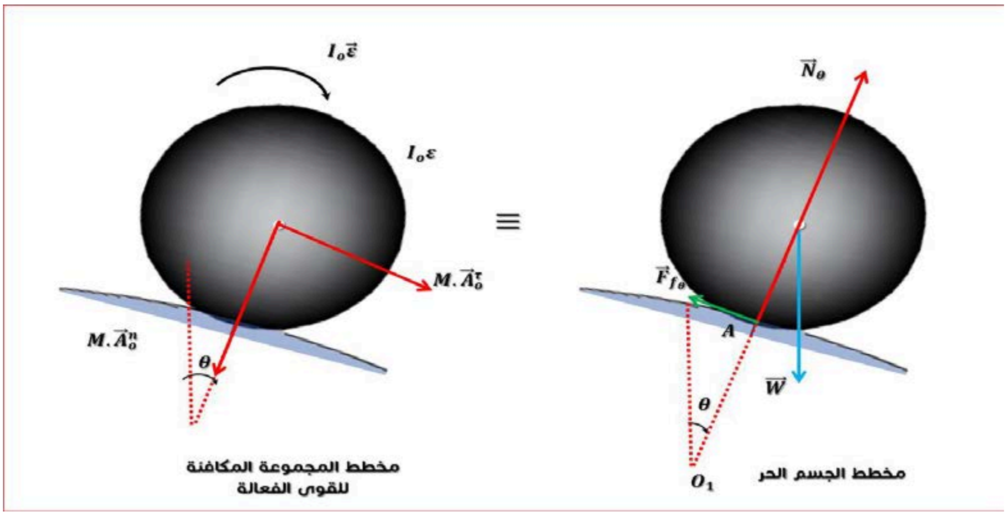
لتعيين التسارع الخطي و الزاوي للدولاب و قوى الاتصال المؤثرة عليه , نستخدم معادلات المجموعة المكافئة للقوى الفعالة مع القوى المؤثرة على الدولاب.

ندرس حركة الدولاب بعد عزله عن قيوده و الخاضع عند الوضع العام المحدد بالزاوية θ لوزنه $(W = m.g)$ في مركز ثقله O , الذي يتحرك على مسار دائري حول مركز الكرة O_1 , و قوة القيد مع السطح الكروي في نقطة التماس A , الذي يتحلل إلى مركبة شاقولية N_θ تدعى برد الفعل الناظمي , و مركبة أفقية $F_{f\theta}$ تمثل قوة الاحتكاك تتجه باتجاه يعاكس انزلاق الدولاب , و بما أن الدولاب يتدحرج بحركة مستوية فمعادلات الحركة تعطى لـ : الجزء الانسحابي للحركة :

$$m.A_o = m.A_o^N + m.A_o^\tau = \sum F = W + F_{f\theta} + N_\theta$$

الجزء الدوراني من الحركة $I_O.E = M_O^e$

يمثل الشكل التالي مخطط الجسم الحر , و مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفاعلة للدولاب .



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

بمساواة المخططين , و بإسقاط معادلة القوى :

على منحى المتجه الواحدي τ : $\qquad (1) \qquad m.A_o^\tau = W.\sin\theta - F_{f\theta}$

على منحى المتجه الواحدي n : $\qquad (2) \qquad m.A_o^n = W.\cos\theta - N_\theta$

و باستخدام علاقة العزوم حول A : $(3) \qquad I_o.\varepsilon + m.A_o^\tau.r = W.r.\sin\theta$

من دراسة حركة الدولاب حول حصلنا على ثلاث معادلات بخمسة مجاهيل , هي :

$$F_{f\theta}, N_\theta, A_o^\tau, A_o^N, \varepsilon$$

يمكن الاستعانة بمعادلات الحركة , حيث مركز كتل الدولاب O يتحرك على مسار دائري حول مركز السطح الكروي الثابت O_1 , منه :

$$A_o^\tau = O_1O.\varepsilon = (R+r)\varepsilon_1 = 9r.\varepsilon_1 \qquad (4)$$

$$A_o^N = O_1O.\omega^2 = (R+r)\omega_1^2 = 9r.\omega_1 \qquad (5)$$

ω_1 و ε_1 تمثلان السرعة الزاوية و التسارع الزاوي لدوران O حول O_1 , و يمكن تعيينهما من دوران O , حول كل من المركز الآني للدوران A و مركز السطح الدائري ,وجهتهم مع عقارب الساعة , منه :

$$V_O = V_{OO_1} = V_{OA} \rightarrow O_1O.\omega_1 = OA.\omega \rightarrow (R+r).\omega = r.\omega \rightarrow \omega_1 = \frac{1}{9}\omega$$

بالاشتقاق بدلالة الزمن :

$$A_{OO_1}^\tau = A_{OA}^\tau \rightarrow O_1O.\varepsilon_1 = OI.\varepsilon \rightarrow (R+r).\varepsilon = r.\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{1}{9}\varepsilon$$

حيث ε , ω تمثلان السرعة الزاوية و التسارع الزاوي لدوران O حول A , أي : دوران الدولاب و كل جسيماته حول A .

و يمكن تعيين ω من تطبيق علاقة مبدأ تغير الطاقة الحركية على الدولاب بين وضعين , من الوضع الابتدائي الساكن المحدد بالزاوية θ_0 إلى الوضع العام المحدد بالزاوية θ , و الذي يتحرك خلالها حركة مستوية عامة :

$$\frac{1}{2}I_A.\omega^2 - 0 = \frac{1}{2}I_O.\omega^2 + \frac{1}{2}m.V_O^2 = w_{F_{f\theta}} + w_{N_\theta} + w_W$$

حيث : $V_O = \omega.r\ , w_{F_{f\theta}} = 0, w_{N_\theta} = 0\ , w_W = m.g(R+r)(1-cos\theta)$

و منه نحصل على علاقة سرعة الدولاب الزاوية : $\omega^2 = 12\frac{g}{r}(1-cos\theta)$

و منه علاقة السرعة الزاوية لدوران O حول O_1 : $\omega_1^2 = \frac{4g}{27r}(1-cos\theta)$

باشتقاق علاقة السرعة الزاوية ω بالنسبة للزمن نحصل على علاقة التسارع الزاوي ε

$$2\omega\frac{d\omega}{dt} = 12\frac{g}{r}(sin\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

حيث : $\frac{d\theta}{dt} = \omega_1 = \frac{1}{9}\omega \quad , \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$

بالتعويض : $\varepsilon = \frac{2g}{3r}sin\theta$

و منه علاقة التسارع الزاوي لدوران O حول O_1 : $\varepsilon = \frac{2g}{27r}sin\theta$

بالتعويض في علاقات الحركة (4) و (5) نحصل على مركبات التسارع الخطي لمركز الكتل :

$$A_O^N = \frac{4}{3}g(1-cos\theta) \quad , \quad A_O^\tau = \frac{2}{3}g.sin\theta$$

بالتعويض في علاقات التحريك (1) و (2) نحصل على مركبات قوة القيد :

$$N_\theta = \frac{1}{3}W(7cos\theta - 4) \quad , \quad F_{f\theta} = \frac{1}{3}W.sin\theta$$

بالتعويض في علاقة التحريك (3) نحصل على علاقة التسارع الزاوي :

$$\varepsilon = \frac{2g}{3r}sin\theta$$

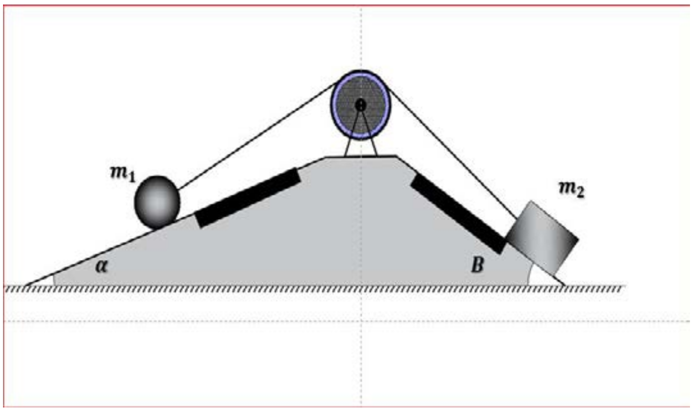
و هذا ما حصلنا عليه باشتقاق علاقة السرعة الزاوية ω بدلالة الزمن .

و يترك الدولاب السطح الدائري عندما تصبح : $N_\theta = 0$

و يتحقق ذلك عند الوضع المحدد بالزاوية :

$$7cos\theta = 4 \rightarrow \cos\theta = \frac{4}{7} \rightarrow \theta = 55.15°$$

المسألة السابعة عشر:



تبدأ المجموعة الموضحة بالشكل حركتها دون سرعة ابتدائية، حيث عامل الاحتكاك لكل من الكتل (m_1) و (m_2) على المستويات المائلة هو نفسه، أي:

$$f_1 = f_2 = f = \tan\alpha$$

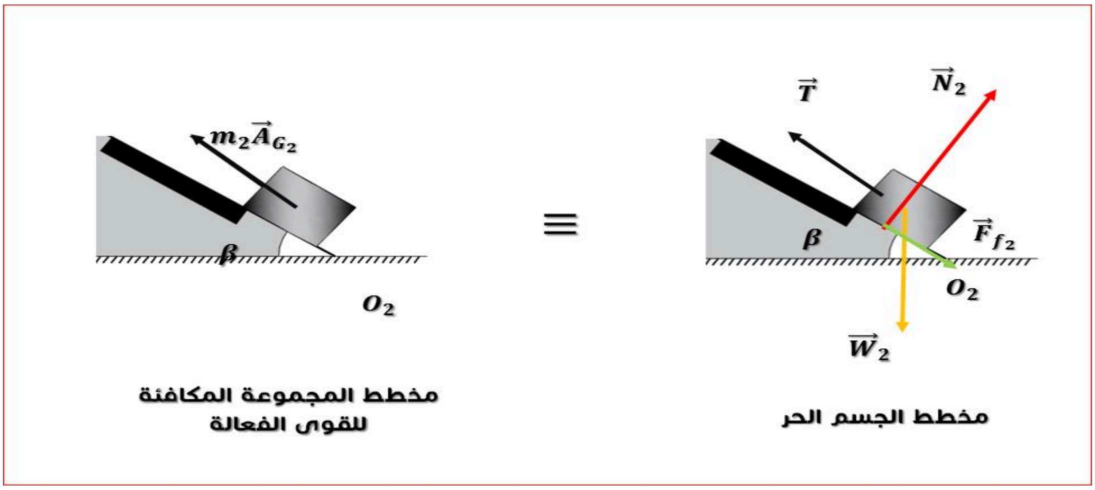
ادرس الحركة بإيجاد الشروط اللازمة حتى يستطيع الجسم (m_2) الصعود عندما يتدحرج القرص (m_1) دون انزلاق نحو الأسفل.

الحل:

لتحديد الشروط اللازمة حتى يتم صعود الكتلة (m_2) نحو الأعلى بحركة متسارعة وتدحرج القرص (m_1) نحو الأسفل دون انزلاق على المستويات المائلة، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة مع القوى المؤثرة على كل كتلة على حده.

ندرس حركة الكتلة (m_2) بعزلها عن المجموعة والخاضعة عندئذ لوزنها $(W_2 = m_2 . g)$، ورد الفعل (R_2) الذي يتحلل إلى مركبة (N_2) شاقولية تدعى برد الفعل الناظمي، ومركبة (F_{f2}) تمثل قوة الاحتكاك، وشد الخيط (T)، وبما أنها تنزلق على المستوى المائل فحركتها انسحابية وفق المعادلة:

$$m_2 . A_{G2} = \sum F^e = W_2 + T + N_2 + F_{f2}$$



يمثل مخطط الجسم الحر ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للكتلة (m_2).

بمساواة المخططين وبإسقاط العلاقة على منحى اتجاه تسارع مركز الكتل (G_2) الذي فرض نحو الأعلى:

$$m_2.A_{G2} = T - m_2.g.sin\beta - F_{f2} \dots (1)$$

وعلى الناظم عليه:

$$O = N_2 - m_2.g.cos\,\beta \dots (2)$$

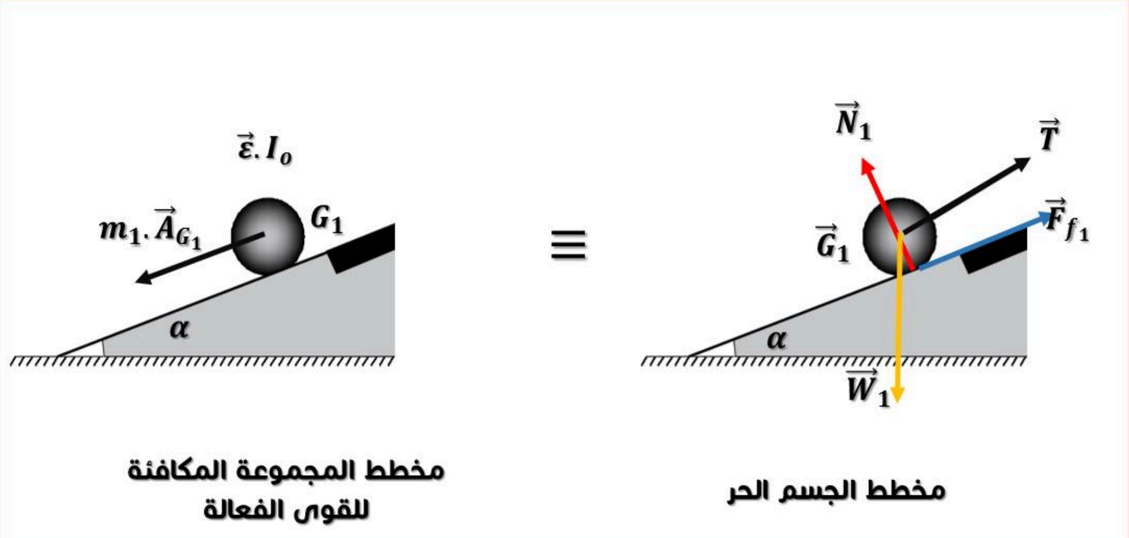
ومن شرط الانزلاق:

$$F_{f2} = f.N_2 \dots (3)$$

أما حركة القرص بعد عزله عن المجموعة، فهي حركة مستوية حيث يتدحرج دون انزلاق على المستوي المائل، والخاضع عندئذ لوزنه $(W_1 = m_1.g)$، ورد الفعل (R_1') الذي يتحلل إلى مركبة (N_1) تدعى برد الفعل الناظمي، ومركبة (F_{f1}) تمثل قوة الاحتكاك، وشد الخيط (T)، بما أن حركة القرص مستوية فمعادلات الحركة تعطى لـ:

الجزء الانسحابي من الحركة: $m_1.A_{G1} = \sum F^e = W_1 + T + N_1 + F_{f1}$

الجزء الدوراني من الحركة: $\mathrm{I_{G1}.E = M^e_{G_1}}$



يمثل مخطط الجسم الحر ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للكتلة (m_1).

بمساواة المخططين وبإسقاط المعادلات على ثلاثة محاور متعامدة:

على منحى اتجاه تسارع مركز الكتل (G_1) الذي فرض نحو الأسفل:

$$m_1.A_{G_1} = m.g.sin\alpha - F_{f1} - T \dots (4)$$

وعلى الناظم عليه:

$$O = N_1 - m_1.g.cos\alpha \dots (5)$$

و لايجاد العزم على المحور العمودي على مستوى الحركة نجد ان :

$$\frac{1}{2}m_1 . R^2 . \varepsilon = F_{f_1} . R \dots . (6)$$

من دراسة حركة الكتلتين حصلنا على ستة معادلات فيها ثمانية مجاهيل، وهي:

$$F_{f_1}, F_{f_2}, N_1, N_2, T, A_{G_1}, A_{G_2}, \varepsilon$$

يمكن الاستعانة بمعادلات الحركة حيث المركز (G_1) والمركز (G_2) نقطتان من الخيط الذي لا يمتط ويتحرك حركة انسحابية، منه:

$$A_{G_1} = A_{G_2} = A \quad \dots . (7)$$

بما أن القرص يتدحرج وحركة مركزه هي حركة دورانية حول المركز الآني (I) ومنه:

$$R . \varepsilon = A_{G_1} = A \dots . (8)$$

بالتالي يمكن إيجاد المجاهيل من المعادلات الثمانية وذلك بحل معادلات التوازن:

من (2) نحصل على:

$$\mathrm{N}_2 = \mathrm{m}_2 . g . \cos\beta$$

من (3) نحصل على:

$$F_{f_2} = f . m_2 . g . \cos\beta$$

من (5) نحصل على:

$$N_1 = m_1 . g . \cos\alpha$$

ومن ثم نعوض في علاقات التحريك:

$$m_2 . A = T - m_2 . g(\sin\beta + f . \cos\beta) \dots (1')$$

$$m_1 . A = m_1 . g . \sin\alpha - F_{f_1} - T \dots (4')$$

$$\frac{1}{2}m_1 . A = F_{f_1} \quad \dots (6')$$

بجمع هذه العلاقات نحصل على:

$$A = \frac{2[m_1 . g . \sin\alpha - m_2 . g(\sin\beta + f . \cos\beta)]}{3m_1 + 2m_2}$$

بالتعويض في $(1')$ نحصل على:

$$T = \frac{m_1.m_2.g\ [2sin\alpha + 3sin\beta + 3f.cos\beta]}{3m_1 + 2m_2}$$

بالتعويض في (8) نحصل على:

$$\varepsilon = \frac{2\ [m_1.g.sin\alpha - m_2.g(sin\beta + f.cos\beta)]}{R(3m_1 + 2m_2)}$$

بالتعويض في $(6')$ نحصل على:

$$F_{f1} = \frac{m_1^2.g.sin\alpha - m_1.m_2.g(sin\beta + f.cos\beta)}{3m_1 + 2m_2}$$

بالتعويض في $(4')$ نحصل على تطابق في القيم.

أما شروط الحركة المطلوبة حتى يتم صعود الكتلة () نحو الأعلى بحركة متسارعة، وتدحرج القرص () نحو الأسفل دون انزلاق على المستويات المائلة. فهي:

الشرط الأول: $A > 0$

الشرط الثاني: $F_{f1} < f.N_1$

من الشرط الأول نحصل على أن:

$$m_1.sin\alpha > m_2(sin\beta + f.cos\beta)$$

منه:

$$f < \frac{m_1.sin\alpha - m_2.sin\beta}{m_2.cos\beta}$$

ومن الشرط الثاني نحصل على أن:

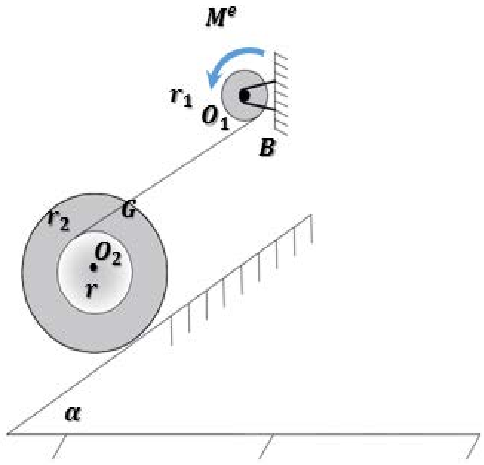
$$m_1(sin\alpha - 3f.cos\alpha) < m_2(sin\beta + f.cos\beta + 2f.cos\alpha)$$

$$f > \frac{m_1.sin\alpha - m_2.sin\beta}{m_2.cos\beta + (3m_1 + 2m_2)\ cos\alpha}$$

بالتالي الشرط اللازم لتحقيق الحركة هو:

$$\frac{1}{m_2.cos\beta} > f > \frac{1}{m_2.cos\beta + (3m_1 + 2m_2)\ cos\alpha}$$

مسألة الثامنة عشر:



ملفاف كتلته m_1 ونصف قطره r_1 وعزم عطالته حول مركزه الهندسي o_1 هو $(I_{o2} = m_1.r_1^2)$

يستطيع الدوران دون احتكاك حول محور ثابت مار من o_1 تحت تأثير عزم دوراني M_{o1}^e, ليسحب أسطوانة

كتلتها m_2 ونصف قطرها r_2 وعزم عطالتها حول مركزها الهندسي o_2 هو $(I_{o2} = m_2.r_2^2/2)$,

بوساطة حبل ملتف على بكرة صغيرة مهملة نصف قطرها r مثبتة على الأسطوانة كما في الشكل

المطلوب:

1. تعيين التسارع الخطي والزاوي للأسطوانة والتسارع الزاوي للملفاف والقوى المؤثرة عليهم ,
2. ما هي قيمة العزم الدوراني M_{o1}^e الذي يجب تطبيقه على الملفاف , حتى تستطيع الأسطوانة التدحرج دون انزلاق على سطح مائل بزاوية α مع الأفق , وليتحرك مركز كتلتها o_2 حركة متسارعة بانتظام بتسارع قدره A. معتبرا f معامل احتكاك بين الأسطوانة والسطح المائل .

تطبيق عددي : $A = 1\ m/sec$ $\quad r = 0.2\ m$ $\quad m_1 = 50\ kg$

$g = 10\ m/sec^2$ $\quad r_1 = 0.5\ m$ $\quad m_2 = 200\ kg$

$\alpha = 30^o$ $\quad r_2 = 1\ \ m$ $\quad f = 0.2$

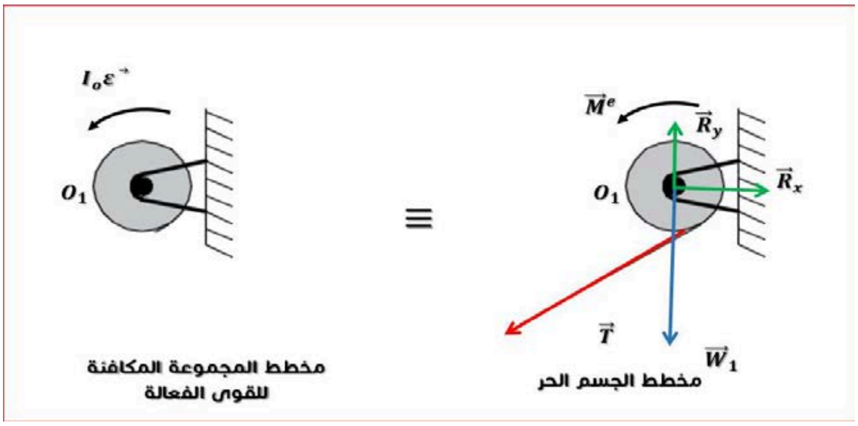
الحل:

لايجاد قيمة العزم الدوراني M_{o1}^{e} اللازم تطبيقه على الملفاف لتحقيق الحركة المطلوبة , نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة مع القوى المؤثرة على كل من الملفاف والاسطوانة على حده .

ندرس حركة الملفاف بعد عزله عن المجموعة والخاضع عندئذ لوزنه $m_1.g$ ورد الفعل في محور دورانه R_1 الممثل بمركبتيه R_{1x} و R_{1y} وشد الخيط T والعزم الدوراني M_{o1}^{e} والذي يتحرك حركة دورانية حول محوره الثابت وفق المعادلات :

$$I_{O1}.E_1 = M_{o1}^{e} \quad ,0 = \sum F = m_1.g + R_1 + T$$

ويمثل مخطط الجسم الحر ,ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للملفاف .



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

بمساواة المخططين , وبإسقاط معادلة القوى على محورين متعامدين :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 0 = R_{1x} - T.cos\alpha \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 0 = R_{1y} - T.sin\alpha - m_1.g \quad (2)$$

وبتطبيق معادلة العزم حول O1

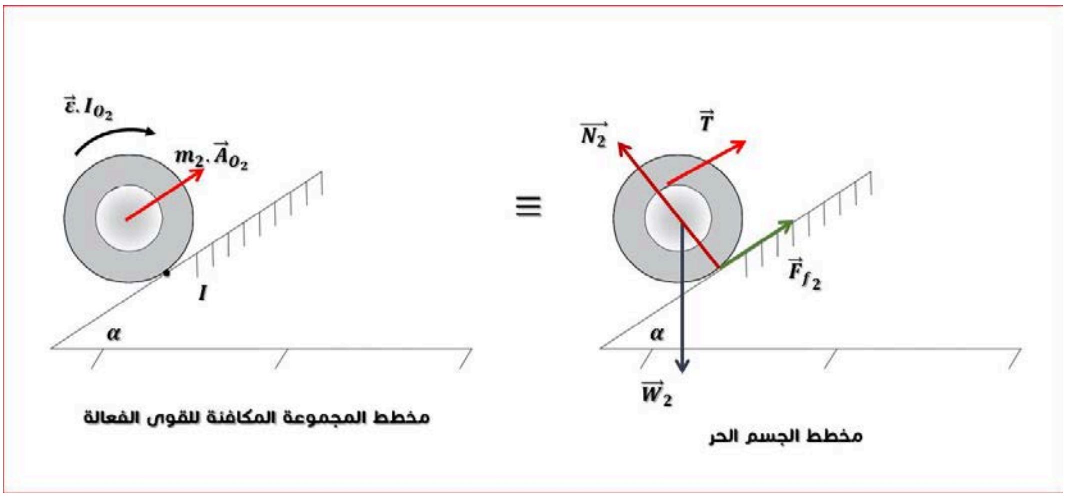
$$m_1.r_1^2.\varepsilon_1 = M_{o1}^{e} - T.r_1 \quad (3)$$

اما حركة الأسطوانة فهي حركة مستوية , وتتم دراستها بعد عزلها عن الجملة ,والخاضعة عندئذ لوزنها $m_1.g$ وقوة الاحتكاك F_{f2} التي من دونها لا تتدحرج الأسطوانة ورد الفعل الناظمي N_2 وشد الخيط T ومعادلات حركتها تعطى:

-الجزء الانسحابي من الحركة: $m_2.A_{O2} = \sum F = m_2.g + T + N_2 + F_{f2}$

-الجزء الدوراني من الحركة: $I_{O2}.E_2 = M_{O2}$

يمثل مخطط الجسم الحر ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للأسطوانة .



مخطط الجسم الحر ≡ مخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة

وبمساواة المخططين , وبإسقاط معادلة القوى على منحى تسارع A_{O2} والذي يتجه نحو الأعلى نحصل على :

$$m_2.A_{O2} = T + F_{f2} - m_2.g.sin\alpha \qquad (4)$$

وبإسقاطها على منحى عمودي على منحى A_{O2} نحصل على :

$$0 = N_2 - m_2.g.sin\alpha \qquad (5)$$

وبتطبيق معادلة العزم حول O_2 نحصل على :

$$\frac{1}{2}m_2r_2^2\varepsilon_2 = T.r - F_{f2}.r_2 \qquad (6)$$

نحصل على ست معادلات بثمانية مجاهيل , هي : $R_{1x}, R_{1y}, F_{f2}, N_2, T, M_{O1}^e, \varepsilon_1, \varepsilon_2$

نستعين بمعادلات الحركة بإيجاد علاقات لمميزات الحركة المجهولة , بدلالة التسارع الخطي المعلوم ,حيث:

تتدحرج الأسطوانة وحركة مركزها هي حركة دورانية حول المركز الآني I ومنه :

$$r_2.\varepsilon_2 = A_{O2} = A \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{1}{r_2}A \qquad (7)$$

وبما ان A وB نقطتان من الخيط الذي لا يمتط ويتحرك حركة انسحابية يكون :

$$A_B^\tau = A_A^\tau \Rightarrow r_1.\varepsilon_1 = (r_2 + r)\varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{r_2 + r}{r_2}\varepsilon_2 = \frac{r_2 + r}{r_1 . r_2}A$$

بحل علاقات التوازن :

من العلاقة (1) نحصل على : $R_{1x} = T.cos\alpha \quad (1^*)$

من العلاقة (2) نحصل على : $R_{1y} = T.sin\alpha + m_1 . g \quad (2^*)$

من العلاقة (5) نحصل على : $N_2 = m_2 . g. cos\alpha$

وبالتعويض في علاقات التحريك نحصل على :

$$\frac{r_2 + r}{r_2}m_2 . A = \frac{1}{r_1}M_{01}^e - T \qquad (3^*)$$

$$m_2 . A = T + F_{f2} - m_2 . g. sin\alpha \qquad (4^*)$$

$$\frac{1}{2}m_2 . A = \frac{r}{r_2}T - F_{f2} \qquad (6^*)$$

وبجمع العلاقتين (6^*) و(4^*) نحصل على : $T = \frac{r_2}{2(r_2+r)}m_2(3A + 2. g. sin\alpha)$

بالتعويض في (6^*) نحصل على : $F_{f2} = \frac{1}{2(r_2+r)}m_2[(2r - r_2)A + 2r. g. sin\alpha]$

بالتعويض في (3^*)نحصل على :

$$M_{01}^e = \frac{r_1 . r_2}{2(r_2 + r)}m_2(3A + 2. g. sin\alpha) + \frac{r_1(r_2 + r)}{r_2}m_1 . A$$

بالتعويض في (1^*) نحصل على : $R_{1x} = \frac{r_2}{2(r_2+r)}m_2(3A + 2. g. sin\alpha). cos\alpha$

بالتعويض في (2^*) نحصل على: $R_{1y} = \frac{r_2}{2(r_2+r)}m_2(3A + 2. g. sin\alpha). sin\alpha + m_1 . g$

التطبيق العددي يتم بالتعويض بالقيم المعطاة نحصل على :

$F_{f2} = 116.7\ N \qquad T = 1083\ N$

$R_{1x} = 937.9\ N \qquad N_2 = 1699\ N$

$R_{1y} = 1041.5\ N \qquad M^e = 571.6\ N.m$

لمقاومة هذه القيمة من قوة الاحتكاك F_{f2} نحتاج الى معامل احتكاك f لا يقل عن :

$$f = F_{f2}/N_2 = 116.7/1699 = 0.069$$

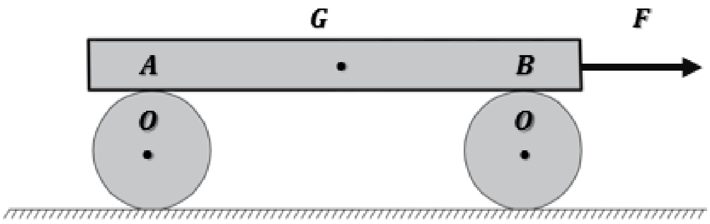
بما ان معامل الاحتكاك بين الأسطوانة والسطح المائل لا يقل عن 0.2 , بالتالي فإن خشونة السطح تكفي لتحقيق حالة التدحرج للأسطوانة .

أما اذا كان معامل الاحتكاك بين الأسطوانة والسطح المائل أقل من 0.069 عندئذ تصبح قوة الاحتكاك

$F_{f2} = f.N_2$ وبالتالي تكون الأسطوانة في حالة انزلاق أو حالة على وشك الانزلاق ولا يستطيع

التدحرج نحو الأعلى .

المسألة التاسعة عشر:



يستند لوح متجانس كتلته (M) على أسطوانتين مصمتتين خشنتين متشابهتين، كتلة كل منهما (m) ونصف قطر كل منهما (r) وعزم عطالتهما حول محورهما الهندسي المار من (O) هو $(I_O = m.r^2/2)$. يسحب اللوح بوساطة قوة ثابتة قدرها (F) نحو اليمين ليتحرك دون انزلاق على الأسطوانتين مؤدياً لتدحرجهما دون انزلاق أيضاً على السطح الأفقي الخشن.

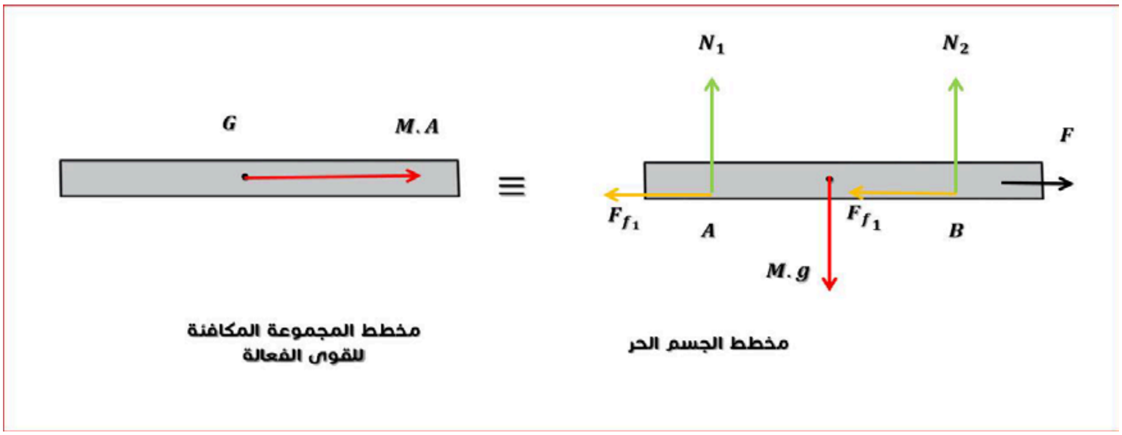
المطلوب عندما يصبح مركز كتل الجائز (G) في منتصف البعد بين نقطتي التماس $(A$ و $B)$ كما إيجاد التسارع الخطي للوح، والتسارع الخطي والزاوي للأسطوانتين، والقوى المؤثرة عليه.

الحل:

لإيجاد التسارع الخطي للوح، والتسارع الخطي والزاوي للأسطوانتين، والقوى المؤثرة عليهم، نستخدم معادلات الحركة المعبرة عن تكافؤ المجموعة المكافئة للقوى الفعالة، مع القوى المؤثرة على كل وصلة على حده

ندرس حركة اللوح بعد عزله عن المجموعة، والخاضع في الوضع المطلوب لوزنه (Mg) في مركز ثقله (G)، وقوة القيد في كل من نقطتي التماس $(A$ و $B)$ مع الأسطوانتين المتشابهتين والممثلة بالمركبتين (F_{f_1}) قوة الاحتكاك و(N_1) رد الفعل الناظمي، وبما أنه يمس الأسطوانتين طوال الحركة، فحركته انسحابية وفق المعادلة:

$$M.A = \sum F = M.g + 2N_1 + 2F_{f1} + F$$



ويمثل مخطط الجسم الحر، ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للوح.

بمساواة المخططين، وبإسقاط علاقة القوى على منحى تسارع (A) نحصل على:

$$M.A = F - 2F_{f1} \dots.(1)$$

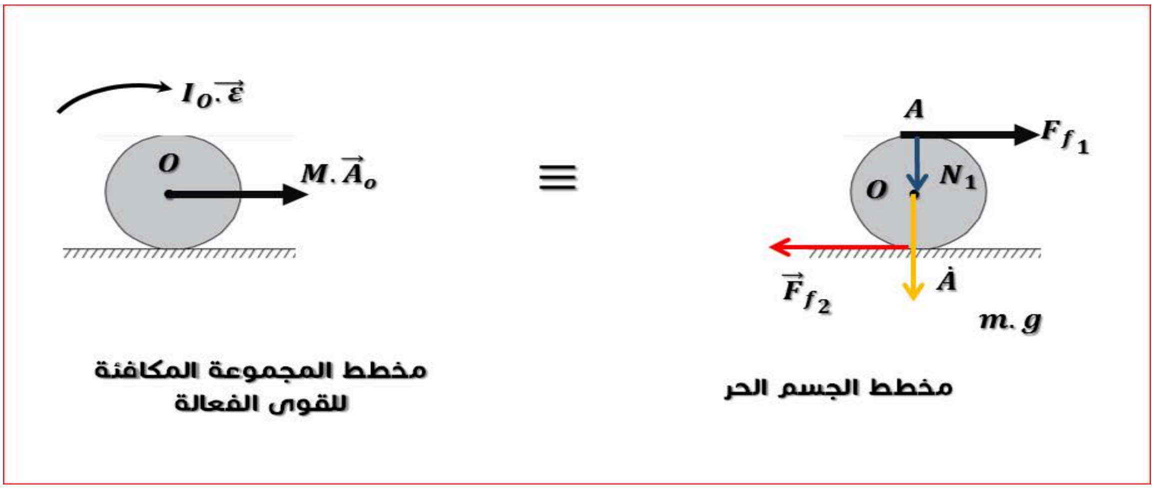
وبإسقاطها على منحى عمودي على منحى (A) نحصل على:

$$O = 2N_1 - M.A \;\dots(2)$$

ندرس حركة إحدى الأسطوانتين المتشابهتين بعد عزلها عن المجموعة التي تتدحرج على كل من الجائز والسطح الأفقي، والخاضعة في الوضع المطلوب لوزنها $(m.g)$ في مركز ثقلها (O)، وقوة القيد في نقطة التماس (A') مع السطح الأفقي الممثلة برد الفعل الناظمي (N_2) وقوة الاحتكاك (F_{f2}) التي من دونها لا تتدحرج على السطح، وقوة القيد في نقطة التماس (A) مع الجائز الممثلة برد الفعل الناظمي (N_1) وقوة الاحتكاك (F_{f1}) التي من دونها لا تتدحرج على الجائز ، وبما أن حركة الأسطوانة مستوية فمعادلات الحركة تعطى ل:

الجزء الانسحابي من الحركة: $m.A_0 = \sum F = m.g + N_2 + N_1 + F_{f2} + F_{f1}$

الجزء الدوراني من الحركة: $I_0.E = M_0$



يمثل مخطط الجسم الحر ومخطط المجموعة المكافئة للقوى الفعالة للأسطوانة.

بمساواة المخططين وبإسقاط علاقة القوى على منحى تسارع (A_0):

$$m.A_0 = F_{f2} - F_{f1} \ldots..(3)$$

وبإسقاطها على منحى عمودي على منحى (A_0) نحصل على:

$$O = N_1 + m.g - N_2 \ldots.(4)$$

وبتطبيق علاقة العزم نحصل على:

$$I_o.\varepsilon = (F_{f2}+F_{f1})r \ldots.(5)$$

نحصل على خمسة معادلات بسبعة مجاهيل

$$F_{f1}, F_{f2}, N_1, N_2, A, A_0, \varepsilon$$

نستعين بمعادلات الحركة بإيجاد علاقات لمميزات الحركة المجهولة بدلالة إحداهن، وليكن التسارع الخطي للجائز (A).

بما أن حركة الأسطوانة هي حركة دورانية آنية حول المحور الآني المار من (A') بالتالي:

$$\frac{A_0}{r} = \frac{A_A}{2r} = \varepsilon$$

وبما أن حركة الجائز هي حركة انسحابية بالتالي: $A_A = A_B = A$

ومنه: $A_0 = \frac{1}{2}A \ldots.(6)$

و: $\varepsilon = \frac{1}{2r}A \ldots.(7)$

حل المعادلات يتم بحل علاقات التوازن:

من العلاقة (2) نحصل على:

$$N_1 = \frac{1}{2}M.g$$

من العلاقة (4) نحصل على:

$$N_2 = \frac{1}{2}g(M+2m)$$

وبتعويض علاقات الحركة في علاقات التحريك نحصل على:

$$M.A = F - 2F_{f1} \quad \ldots\ldots(1')$$

$$\frac{1}{2}m.A = F_{f1} - F_{f2} \ldots..(3')$$

$$\frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2r}A = (F_{f1} + F_{f2})r \;...(5)$$ من

$$\frac{1}{4}m.A = F_{f1} + F_{f2} \;...(5')$$

بجمع العلاقات $(1')$ و$(3')$ و$(5')$ نحصل على:

$$\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}m + M\right)A = F$$

منه:

$$A = \frac{4}{3m + 4M}\;F$$

نعوض في (6) نحصل على:

$$A_0 = \frac{2}{3m + 4M}\;F$$

نعوض في (7) نحصل على:

$$\varepsilon = \frac{2}{2(3m + 4M)}\;F$$

نعوض في ('1) نحصل على:

$$F_{f1} = \frac{3m}{2(3m + 4M)}\;F$$

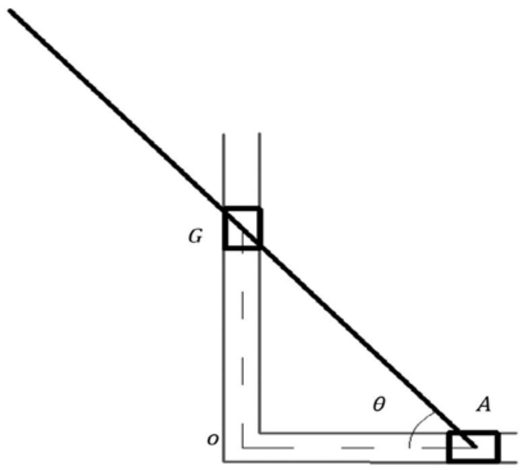
نعوض في ('3) نحصل على:

$$F_{f2} = -\frac{m}{2(3m + 4M)}\;F$$

الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه () معاكس للاتجاه المفروض في مخططات الجسم الحر.

نعوض في ('5) نحصل على تطابق بالقيم

المسألة العشرون:



قضيب متجانس طوله $l = 1.2\ m$ كتلته $M = 20\ kg$ مركز كتله G يقع في منتصف الساق كما في الشكل

يبدأ حركته من السكون من والوضع $\theta = 90°$ (الوضع الشاقولي)
بحيث تكون حركة مركز كتله مقيدة على الدليل الشاقولي الأملس... أ

المطلوب:

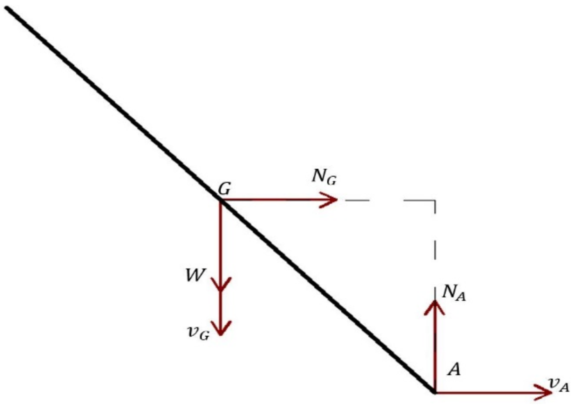
أوجد عند الوضع $\theta = 30°$ ما يلي:

قيمة واتجاه السرعة الزاوية

تسارع مركز الكتل G بدلالة ε وذلك بإيجاد إحداثياته معتبرا O مبدأ الإحداثيات

ε والقوى المؤثرة في القضيب

الحل:



لإيجاد السرعة نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة المتمثلة بالقضيب المتحرك حركة مستوية عامة بين وضعين....الابتدائي الساكن المتمثل بالزاوية $\theta_0 = 90°$ والنهائي المتمثل بالزاوية $\theta_1 = 30°$

$$E^1 - E^0 = \sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)}$$

$$E^0 = 0\ , E^1 = \frac{1}{2} M.v_G^2 + \frac{1}{2} I_G.\omega^2$$

$$\sum W_{F(\theta_0 \to \theta_1)} = W_{W_G} + W_{N_G} + W_{N_A}$$

$$W_{W_G} = M.g.\frac{l}{2}.(1 - \sin\theta_1)$$

$W_{N_B} = W_{N_A} = 0$ (لأن القوة عمودية على الانتقال في كل لخظة)

ولدينا من المركز الأني:

$$v_G = \omega \overline{IG} = \omega.\frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M \left(\omega.\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} M.l^2\right).\omega^2 = M.g.\frac{l}{2}.(1 - \sin\theta_1)$$

$$\frac{1}{6}M.l^2.\omega^2 = M.g.\frac{l}{2}.(1-\sin\theta_1) \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{l}(1-\sin\theta_1)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 3\times\frac{9.81}{1.2}(1-\sin 30°) = 12.3 \Rightarrow \omega = 3.5\,rad/s$$

$$v_G = \omega.\frac{l}{2} = 3.5\left(\frac{1.2}{2}\right) = 2.1\,m/s$$

نلاحظ من الرسمة السابقة:

$$X_G = const = 0$$

$$Y_G = \frac{l}{2}.\sin\theta$$

وبالاشتقاق:

$$v_X = 0$$

$$v_Y = \frac{dY_G}{dt} = \frac{l}{2}.\cos\theta.\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2}.\cos\theta(-\omega) = -\frac{l}{2}.\omega.\cos\theta$$

وباشتقاق v_Y مع الانتباه أن ω غير ثابت

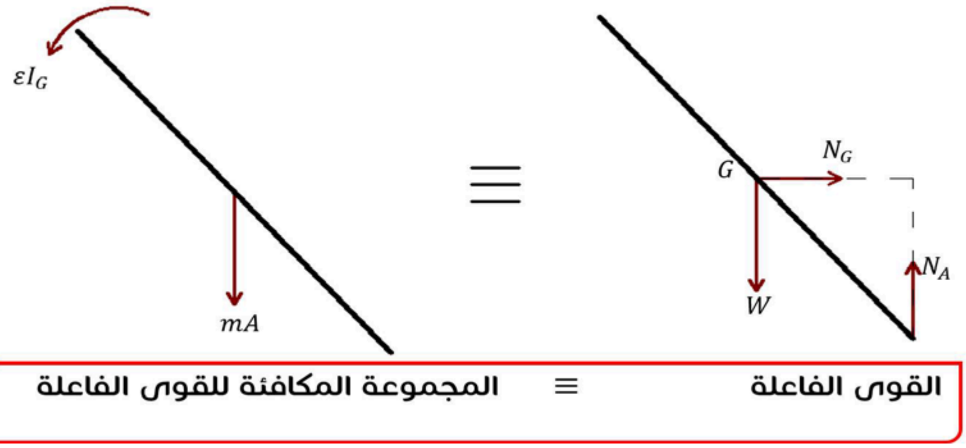
$$A_Y = -\frac{l}{2}(\cos\theta.\frac{d\omega}{dt} + \omega.\frac{d}{dt}(\cos\theta))$$
$$= -\frac{l}{2}(\varepsilon.\cos\theta + \omega(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}) = -\frac{l}{2}(\varepsilon\cos\theta + \omega^2\sin\theta)$$

لإيجاد التسارع نطبق علاقات المجموعة المكافئة على القضيب المتحرك حركة مستوية عامة:

$$I....M.\overrightarrow{A_G} = \sum\overrightarrow{F_G^e}$$

$$II.......I_G.\vec{E} = \overrightarrow{M_G^e}$$

لتوضيح العلاقات نرسم مخططاتها:



بإسقاط العلاقة I:

$$1......\rightarrow +: 0 = N_G$$

$$2.....\downarrow +: M.A_G = W_G - N_A$$

وبأخذ العزوم حول المركز الأني I:

$$3.....\circlearrowleft +: M.A_G.\frac{l}{2}.\cos\theta_1 + I_G.\varepsilon = 0$$

من العلاقة 3 ومن علاقة التسارع في الطلب الثاني:

$$-M\frac{l}{2}(\varepsilon\cos\theta_1 + \omega^2\sin\theta_1) + \left(\frac{1}{12}M.l^2\right).\varepsilon = 0$$

$$\varepsilon.\cos\theta_1 + \omega^2.\sin\theta_1 + \frac{1}{6}.l.\varepsilon = 0$$

$$\left(\cos\theta_1 + \frac{1}{6}l\right)\varepsilon = \omega^2.\sin\theta_1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega^2.\sin\theta_1}{\left(\cos\theta_1 + \frac{1}{6}l\right)} = \frac{3.5.\sin 30^\circ}{\left(\cos 30^\circ + \frac{1}{6}1.2\right)} = 1.46\ rad/s$$

ومن العلاقة 1: $N_G = 0$

ومن العلاقة 2:

$$N_A = W_G - M.A_G = M.g - M.A_G = 20 \times 9.81 - 20 \times 1.46 = 167\ N$$

المسألة الواحدة والعشرون:

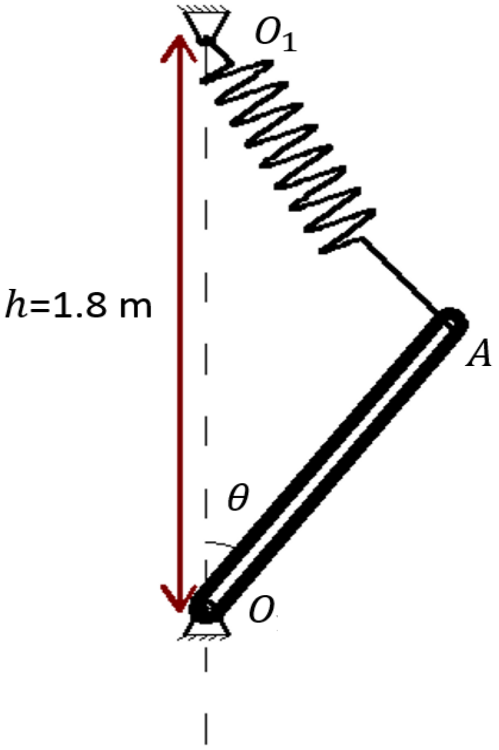
قضيب متجانس $m = 7.5\ kg$, $oA = l = 1.2\ m$

$I_0 = \frac{1}{3}ml^2$,

يتمفصل عند O مفصل ثابت و يرتبط الطرف الأخر A بنابض ثابت صلابته $K = 20\ N.m^{-1}$ يعلق عند O_1

بحيث يكون النابض في طوله الحر شاقوليا في الوضع الابتدائي الساكن حيث ان $\theta = 0$

ينزل القضيب و يدور حول o بتأثير ثقله.



المطلوب:

أوجد عندما تكون الزاوية $\theta = 90^o$ السرعة الزاوية و التسارع الزاوي للقضيب و رد فعل المفصل o عليه.

الحل:

لنطبق مبدأ العمل و الطاقة الحركية على الجملة المتمثلة بالقضيب المتحرك حركة دورانية لامركزية حول O بين وضعين :

الأول : الابتدائي الساكن و المتمثل بالزاوية $\theta = 0^o$

والثاني: النهائي المتمثل بالزاوية $\theta = 90^o$

$$E_{K_1} - E_{K_0} = \Sigma W_{F_{\theta_0 \to \theta_1}}$$

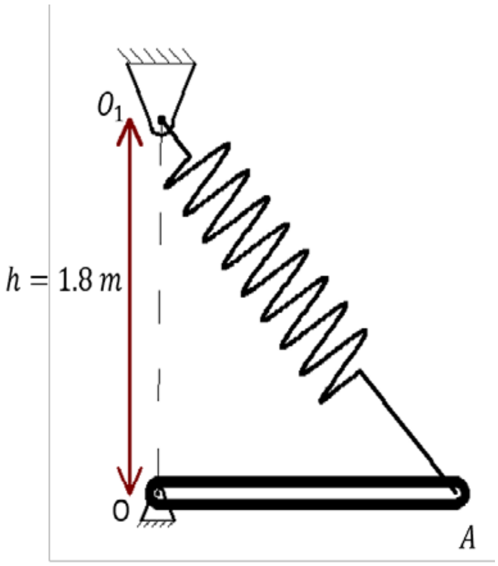
$$E_{K_0} = 0 \qquad , E_{K_1} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$\Sigma W_{F_{\theta_0 \to \theta_1}} = W_{R_x} + W_{R_y} + W_w + W_{F_k}$$

$$W_{R_x} = W_{R_y} = 0 \qquad , \quad W_w = mg\frac{l}{2}$$

$$W_{F_k} = \frac{k}{2}(\Delta l_{in}^2 - \Delta l_{fin}^2)$$

$$\Delta l_{in} = 0 \qquad , \quad \Delta l_{fin} = \sqrt{l^2 + h^2} - l_0$$



$$\Delta l_{fin} = \sqrt{(1.2)^2 + (1.8)^2} - 0.6 = 1.563m$$

$$\Sigma W_{F_{\theta_0 \to \theta_1}} = \frac{1}{2} m.g.l - \frac{k}{2} \Delta l_{fin}^2$$

$$\frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} m.g.l - \frac{k}{2} \Delta l_{fin}^2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2\right) \omega^2 = \frac{1}{2} m.g.l - \frac{k}{2} \Delta l_{fin}^2$$

$$\frac{1}{6} ml^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m.g.l - \frac{k}{2} \Delta l_{fin}^2 \rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} - \frac{3k}{ml^2} \Delta l_{fin}^2$$

$$\omega^2 = 3 \times \frac{9.8}{1.2} - \frac{3 \times 20}{7.5 \times (1.2)^2} (1.263)^2 = 23.6$$

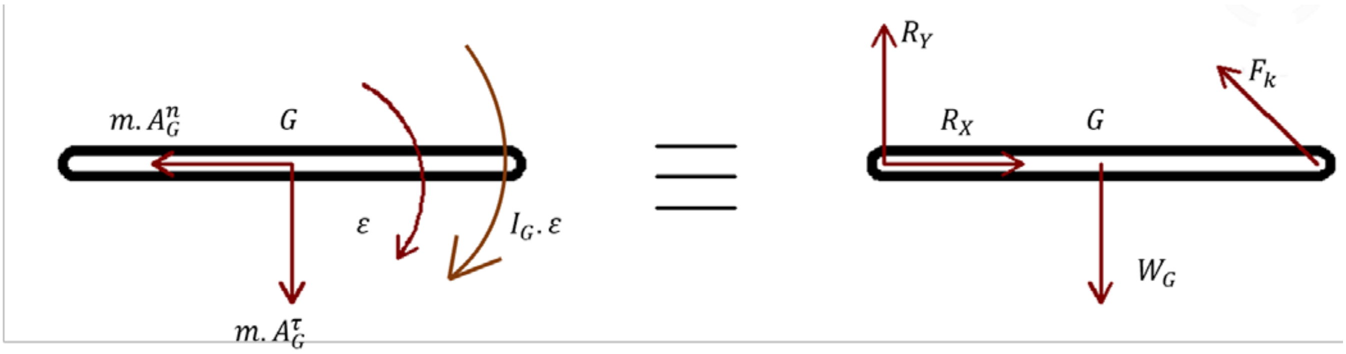
$$\omega \approx 5\, r/s \circlearrowright$$

لإيجاد التسارع الزاوي و القوى المؤثرة على أجزاء الجملة نختار تطبيق علاقات المجموعة المكافئة على الجملة المتمثلة بالساق المتحركة حركة دورانية لا مركزية.

$$m\,\overrightarrow{A_G} = \Sigma \overrightarrow{F_G^e} \qquad \text{I}$$

$$I_G \vec{E} = \Sigma \overrightarrow{M_G^e} \qquad \text{II}$$

لنوضح العلاقات برسم مخططاتها:



المجموعة المكافئة للقوى الفاعلة ≡ القوى الفاعلة

بإسقاط I نجد:

$$\leftarrow \quad mA_G^n = -R_x + F_k.COS(\alpha) \quad \dots 1 \dots$$
$$\downarrow \quad mA_G^\tau = -R_y + w_G - F_k Sin(\alpha)$$

و بأخذ العزوم حول المحور O في العلاقة II (حيث ان الدوران الموجب يتم مع عقارب الساعة)

$$I_G.\varepsilon + mA_G^\tau.\frac{l}{2} = w_G - F_k l Sin(\alpha) \quad \dots 3 \dots$$
$$Sin(\alpha) = \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}} = \frac{1.8}{\sqrt{(1.2)^2 + (1.8)^2}}$$

$$Sin(\alpha) = 0.832$$
$$COS(\alpha) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}} = \frac{1.2}{\sqrt{(1.2)^2 + (1.8)^2}}$$
$$COS(\alpha) = 0.55$$

$$A_G^n = \omega^2 \frac{l}{2} = 15\, m/s^2$$

$$A_G^\tau = \varepsilon.\frac{l}{2} \quad \dots 4 \dots$$

ومن علاقة هويغنز نجد:

$$I_0 = I_G + \frac{m\, l^2}{4} \rightarrow I_G = I_0 - m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{12} m l^2$$

ومن العلاقة ...3... و ...4... وبتعويض القيم السابقة:

$$\frac{1}{12}ml^2\varepsilon + m\varepsilon\frac{l^2}{4} = W_G\frac{l}{2} - F_k l\,Sin(\alpha)$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{l} - \frac{3K}{lm}\,Sin(\alpha) = \frac{\frac{3}{2}(9.8)}{1.2} - \frac{3\times 20}{7.5\times 1.2}\times 0.832$$

$$\varepsilon = 6.7\,r/s^2$$

و من ... 4 ...

$$A_G^{\tau} = \varepsilon\frac{l}{2} = 4\,m/s^2$$

من ... 1 ...

$$R_x = F_K COS(\alpha) - mA_G^{n}$$

$$R_x = K\Delta l_{fin} COS(\alpha) - m\omega^2\frac{l}{2}$$

$$R_x = [20\times(1.563)\times(0.55)] - \left[7.5\times 25\times\frac{1.2}{2}\right]$$

$$R_x = -95.31\ \ N$$

الاتجاه الصحيح بعكس الاتجاه المفروض

$$R_y = mg - K\Delta l_{fin} Sin(\alpha) - mA_G^{\tau}$$

$$R_y = [7.5\ \times 9.8] - [20\times 1.563\times 0.832] - [7.5\times 4]$$

$$R_y = 17.56\ \ N$$